СОДЕРЖАНИЕ

1	Введение в численные методы	5
1.1	Математическое моделирование и вычислительный эксперимент	5
1.2	Погрешности округления	7
1.3	Правила приближенных вычислений и оценка погрешностей при вычислениях	9
2	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	11
2.1	Метод Гаусса	12
2.2	Метод Гаусса с выбором главного элемента	14
2.3	Обращение матрицы	15
3	Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	16
3.1	Метод итераций	16
3.2	Приведение линейной системы к виду, удобному для итераций	19
3.3	Метод Зейделя	19
3.4	Каноническая форма одношаговых итерационных методов	20
3.5	Матричная запись методов итерации и Зейделя	21
4	Решение нелинейных уравнений	23
4.1	Отделение корней	23
4.2	Уточнение корней	24
4.3	Удаление корней	24
5	Метод простых итераций, метод Ньютона, метод секущих	25
5.1	Метод простых итераций	25
5.2	Метод Ньютона	25
5.3	Модифицированный метод Ньютона	26
5.4	Метод секущих	27
6	Интерполирование функции	28
6.1	Интерполяционная формула Лагранжа	28
6.2	Интерполяционная формула Ньютона	30
6.3	Погрешность интерполирования	31
6.4	Оптимальный выбор узлов интерполирования	32
6.5	Интерполирование с кратными узлами	32
7	Интерполирование сплайнами	33
7.1	Построение кубического сплайна	33
7.2	Сходимость процесса интерполирования кубическими сплайнами	36

8	Численное интегрирование	38
8.1	Квадратурные формулы	38
8.2	Формула прямоугольников	39
8.3	Формула трапеций	40
8.4	Формула Симпсона	41
9	Численное дифференцирование	43
10	Многошаговые разностные методы решения задачи Коши. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения	46
10.1	Понятие обыкновенного дифференциального уравнения	46
10.2	Задача Коши	47
10.3	Случай одного уравнения	48
11	Многошаговые разностные методы	49
11.1	Метод Эйлера	49
11.2	Общая схема многошаговых разностных методов	50
11.3	Методы Рунге-Кутта	52
11.4	Общая формулировка методов Рунге-Кутта	53
12	Метод конечных разностей для решения краевых задач	55
12.1	Метод конечных разностей	55
12.2	Метод прогонки	57
13	Метод стрельбы (баллистический метод)	62
13.1	Метод Галеркина	64
14	Численные методы решения уравнений математической физики	67
14.1	Понятие дифференциального уравнения с частными производными	67
14.2	Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными II порядка	67
14.3	Примеры основных типов уравнений с частными производными	68
15	Эллиптические уравнения	70
15.1	Счет на установление	70
15.2	Оптимальный шаг	71
15.3	Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона	72
15.4	Методы Якоби и Зейделя	73
15.5	Метод верхней релаксации	74
15.6	Случай криволинейной области	75
Список литературы		76

1 ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1.1 Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

1.1.1 Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент – это технология, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта. На рисунке 1 представлена схемавычислительного эксперимента.

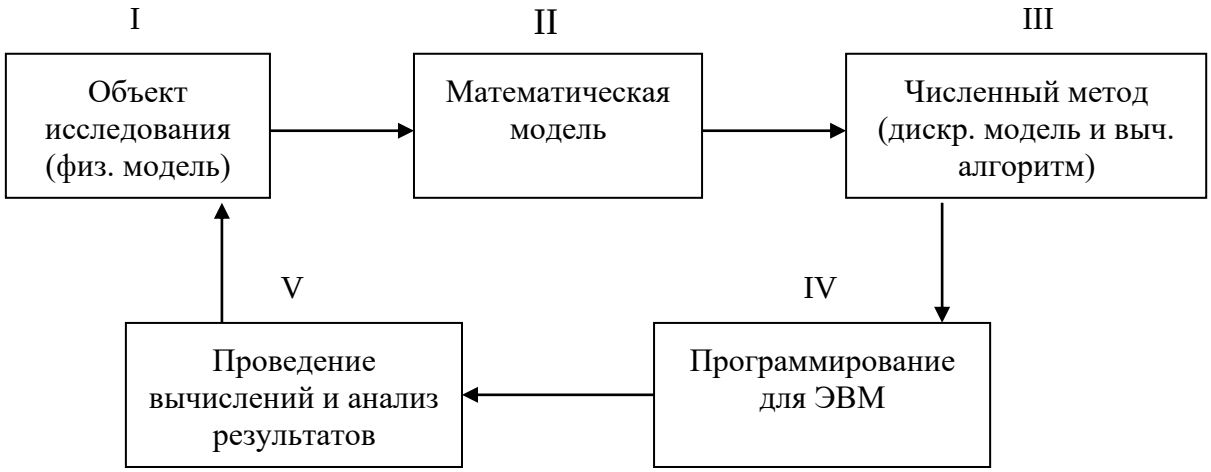


Рисунок 1 – Схема вычислительного эксперимента

Численный метод – это такая интерпретация математической модели («дискретная модель»), которая доступна для реализации на ЭВМ.

Например, если математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение, то численным методом может быть аппроксимирующее его разностное уравнение совместно с алгоритмом, позволяющим отыскать решение этого разностного уравнения. Результатом реализации численного метода на ЭВМ является число или таблица чисел.

Необходимо подчеркнуть, что процесс исследования исходного объекта методом математического моделирования и вычислительного эксперимента неизбежно носит приближенный характер, потому что на каждом этапе вносятся те или иные погрешности.

Различают погрешности модели, метода и вычислительные погрешности.

Погрешности модели возникают в связи с упрощением исходного явления, недостаточно точным заданием коэффициентов уравнения и других входных данных.

Погрешности метода – это, как правило**,** погрешности дискретизации.

Погрешность дискретизации возникает при замене непрерывной модели на дискретную, например, при замене дифференциального уравнения системой алгебраических уравнений.

Погрешность округления возникает при задании в ЭВМ входных данных: коэффициентов и правых частей. В процессе работы алгоритма погрешности округления обычно накапливаются, и в результате решение, полученное на ЭВМ, будет отличаться от точного решения дискретизированной задачи. Результирующая погрешность называется погрешностью округления или вычислительной погрешностью. Величина этой погрешности определяется двумя факторами: точностью представления вещественных чисел в ЭВМ и чувствительностью данного алгоритма к погрешностям округления.

Алгоритм называется устойчивым, если в процессе его работы вычислительные погрешности возрастают незначительно и неустойчивым в противном случае.

В общем случае нужно стремиться, чтобы все указанные погрешности имели один и тот же порядок. Например, нецелесообразно пользоваться разностными схемами, имеющими точность 10^{-6}, если коэффициенты исходных уравнении задаются с точностью 10^{-2}.

1.1.2 Требования к вычислительным методам

I группа требований связана с адекватностью дискретной модели исходной математической задаче. К ним относятся: сходимость численного метода, выполнение дискретных аналогов законов сохранения, качественно правильное поведение дискретной задачи.

Известно, что дифференциальные уравнения математической физики являются следствиями интегральных законов сохранения. Поэтому естественно требовать, чтобы для разностной схемы выполнялись аналоги таких законов сохранения.

Сходимость численного метода тесно связана с его корректностью. То есть, если исходная математическая модель поставлена корректно, т.е. ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных, тогда свойство корректности должно сохраняется и для дискретной модели.

II группа требований, предъявляемых к численным методам, связана с возможностью реализации данной дискретной модели на данной ЭВМ. То есть реальные вычислительные алгоритмы должны быть экономичными как по числу операций, так и по требуемому объему памяти.

1.2 Погрешности округления

1.2.1 Представление вещественных чисел в ЭВМ

При ручном счете пользуются десятичной системой счисления, например:

$103{,}67 = 1\cdot10^{2} + 0\cdot10^{1} + 3\cdot10^{0} + 6\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2}$,

где 10 основание системы счисления. ЭВМ работают в двоичной системе счисления, например:

$0{,}0101=0\cdot2^{0}+0\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2}+0\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-4}$

Вообще, в позиционной системе счисления с основанием *r* запись:

$a = \pm a_n a_{n-1}\cdots a_{0,}a_{-1}a_{-2}\cdots$ означает, что

$$a = \pm (a_n\cdot r^n + a_{n-1}r^{n-1} +\cdots+ a_0\cdot r^0 + a_{-1}\cdot r^{-1} + a_{-2}\cdot r^{-2}+\cdots) \qquad (1)$$

где r – целое число, большее единицы,

$a_i=\{0,1,\cdots r-1\}$

Числа a_i называются разрядами.

Вид (1) называют представлением числа с фиксированной запятой. В ЭВМ чаще всего используется представление чисел в форме с плавающей запятой, в которой любое число представляется в виде:

$$a=Mr^p, \qquad (2)$$

где *r* – основание системы счисления, *p* – целое число (положительное, отрицательное, или 0)$r^{-1} \le |M| < 1;$

M называется мантиссой числа *a;*

*P*называется порядком числа *a*.

В виде (2) можно единственным образом представить любое вещественное число кроме нуля.

Например:

$103{,}67 = 0{,}10367\cdot10^{3}$, то есть M=0,10367; p=3

Двоичное число: $0{,}0101=0{,}101\cdot2^{-1}$; M=0,101; p=-1

Так как в ЭВМ для записи каждого числа отводится фиксированное число разрядов (разрядная сетка), следовательно, абсолютная величина чисел будет ограничена. Например, если ЭВМ имеет 48 разрядов, то для записи числа память распределяется следующим образом:

Знак порядка	Порядок (6 разрядов) 111111=63	Знак мантиссы	Мантисса

48 47 p 42 41 40 1 Следовательно,$2^{-63}<|a|\le 2^{63}$ или $10^{-19}<|a|<10^{19}$

1.2.2 Округление чисел в ЭВМ

Минимальное положительное число M_0 которое может быть представлено в ЭВМ с плавающей запятой, называется машинным нулем. Например, для 48 разрядных ЭВМ $M_0 \approx 10^{-19}$. Число $M_\infty = M_0^{-1}$ называется машинной бесконечностью. Все вещественные числа в данной ЭВМ лежат в пределах от M_0 до M_∞.

Если в процессе счета какой-либо задачи появится вещественное число, меньшее по модулю чем M_0, то ему присваивается нулевое значение. При появлении в процессе счета вещественного числа большего по модулю, чем M_∞, происходит так называемое переполнение разрядной сетки и ЭВМ прекращает счет задачи. Отметим, что нуль и целые числа представляются в ЭВМ особым образом, так что они могут выходить за пределы диапазона $M_0 \div M_\infty$

Из-за конечности разрядной сетки в ЭВМ можно представить точно не все числа из диапазона $M_0 \div M_\infty$, а лишь конечное множество чисел. Число a, не представимое в ЭВМ точно, подвергается округлению $\tilde{a}$. Точность представления характеризуется относительной погрешностью: $\delta = \dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$, величина, которая зависит от способа округления, где числитель этой дроби $\Delta = |a - \tilde{a}|$ называется абсолютной погрешностью.

Простейшим, но не самым точным способом округления является отбрасывание всех разрядов мантиссы числа a, которые выходят за пределы разрядной сетки. При таком способе округления граница относительной погрешности имеет вид: $\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \le 2^{-t+1}$, где t– число двоичных разрядов, отводимых для записи мантиссы.

При более точных способах округления можно добиться, чтобы выполнялась оценка: $\dfrac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \le 2^{-t}$.

То есть, относительная точность в ЭВМ с плавающей запятой определяется числом разрядов t, отводимых для записи мантиссы. Можно считать, что точное число a и отвечающее ему округленное число $\tilde{a}$ связаны равенством: $\tilde{a} = a(1+\varepsilon)$, где $|\varepsilon| \le 2^{-t}$.

Число 2^{-t} называют иногда машинным эпсилоном.Оно характеризует относительную точность представления чисел в ЭВМ.

1.2.3 Накопление погрешностей округления

В процессе вычислений погрешности округления могут накапливаться, так как выполнение каждой из четырех арифметических операций вносит

некоторую погрешность. Пусть $x-$ некоторое число, $fl(x)-$ соответствующее ему округленное число. Считается, что выполнение каждой арифметической операции вносит относительную погрешность не большую чем 2^{-t}, то есть

$fl(a*в)=a*в(1+\varepsilon)$ где $*\in\{+,-,\times,\div\}$ и $|\varepsilon|\le 2^{-t}$

Для оценки влияния погрешностей округления на результат того или иного вычисления алгоритма очень часто используют предположение о том, что результат вычислений, измененный погрешностями округления, совпадает с результатом точного выполнения этого же алгоритма, но с иными входными данными.

1.3 Правила приближенных вычислений и оценка погрешностей при вычислениях

1.3.1 Абсолютная погрешность

Под оценкой погрешности приближенного числа aпонимают установление неравенства вида:

$$|a-a_0|\le\Delta_a \qquad (3)$$

Число Δ_a называется абсолютной погрешностью приближенного числа a (иногда ее называют «предельная абсолютная погрешность»). Это число определяется неоднозначно: его можно увеличить. Обычно стараются указать возможно меньшее число Δ_a, удовлетворяющее неравенству (3).

Пример 1. Даны длины сторон прямоугольника, измеренные с точностью 0,01. Оценить абсолютную погрешность в определении площади.

$a=5{,}43;\quad b=3{,}82;\quad \Delta_a=\Delta_b=0{,}01$

Решение:

$S=a\cdot b=20{,}7426$

$S_{\max}=(a+0{,}01)(b+0{,}01)=20{,}8352$

$S_{\min}=(a-0{,}01)(b-0{,}01)=20{,}6502$

$|S-S_{\min}|=0{,}0924;\quad |S-S_{\max}|=0{,}0926;$

$\Delta_S=0{,}0926\approx 0{,}1$

1.3.2 Относительная погрешность

Относительной погрешностью δ_a приближенного числа a называется отношение: $\delta_a=\dfrac{\Delta_a}{|a|}\qquad a\neq 0$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах, и ее принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (знаками).

Пример 2. Даны длины сторон прямоугольника, измеренные с точностью 0,01. Оценить относительную погрешность в определении площади.

$a = 5{,}43; \quad b = 3{,}82; \quad \Delta_a = \Delta_b = 0{,}01$

Решение: из примера 1 следует, что

$S = a \cdot b = 20{,}7426$

$\Delta_S = 0{,}0926$

следовательно:

$$\delta_S = \frac{0{,}0926}{20{,}7426} = 0{,}0045 = 0{,}45\%$$

Значащие и верные знаки числа.

Значащие цифры числа – это цифры, участвующие в его записи. При подсчете значащих цифр числа не учитывают нулей, стоящих слева, например, в числе 0,010030 пять значащих цифр.

Количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности. Например, если $S = 20{,}7426, \quad \Delta_S = 0{,}0926$, то S имеет три верных знака (2, 0, 7), остальные знаки сомнительные.

Ориентировочно можно считать, что наличие только одного верного знака соответствует относительной погрешности порядка 10%, двух верных знаков – 1%, трех верных знаков – 0,1% и т.д.

В математических таблицах все числа округлены до верных знаков, причем абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего оставленного разряда. Например, если в таблице указано $e = 2{,}718$, то абсолютная погрешность не превосходит $0{,}5 \cdot 10^{-3}$.

В окончательных результатах вычислений обычно оставляют кроме верных один сомнительный знак. В промежуточных 2-3 сомнительных знака.

2 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются системы линейных алгебраических уравнений:

$$A\vec{x} = \vec{f}, \tag{4}$$

где A– вещественная квадратная матрица порядка $m \times m$,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix}$ – искомый вектор, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ : \\ f_m \end{pmatrix}$ – заданный вектор.

Предполагается, что $\det A \neq 0$ => решение (4) существует и единственно.

Из курса алгебры известно, что систему (4) можно решить по крайней мере двумя способами: либо по формулам Крамера, либо методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). При больших m метод Крамера требует порядка m! арифметических действий, а метод Гаусса $O(m^3)$ действий.

Методы решения системы (4) делятся на прямые и итерационные.

В прямых (точных) методах решение $\vec{x}$ системы (4) находится за конечное число арифметических действий.

Итерационные методы (методы последовательных приближений) состоят в том, что решение $\vec{x}$ системы (4) находится как предел при $n \to \infty$ последовательных приближений $\vec{x}^n$, где n номер итерации. Вычисления проводятся до тех пор, пока не будет выполнена оценка

$$\| \vec{x}^n - \vec{x} \| < \varepsilon, \tag{5}$$

где ε – некоторое малое число.

2.1 Метод Гаусса

2.1.1 Основная идея метода

Запишем (4) в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = fm \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Поделив первое уравнение на a_{11}, получим

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1m}x_m = y_1, \quad (7)$$

где $c_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$, $j = 2,\ldots,m; y_1 = \frac{f_1}{a_{11}}$, оставшиеся уравнения выглядят так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = fi; i = 2,3,..,m \quad (8)$$

умножим (7) на a_{i1} и вычтем из i –того уравнения системы (8), $i = 2,3,..,m$. В результате получим:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1j}x_j + \ldots + c_{1m}x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)}x_j + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m = f_2^{(1)} \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mj}^{(1)}x_j + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m = f_m^{(1)} \end{cases} \quad (9)$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}$, $f_i^{(1)} = f_i - y_1a_{i1}; i, j = 2,3,..,m$, матрица системы (9) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 c_{12} \ldots c_{1m} \\ 0\ a_{22}^{(1)} \ldots a_{2m}^{(1)} \\ 0\ a_{m2}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(1)} \end{bmatrix}$$

В системе (9) неизвестное x_1 содержится только в первом уравнении, поэтому в дальнейшем достаточно иметь дело с укороченной системой уравнений

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2j}^{(1)} x_j + \ldots + a_{2m}^{(1)} x_m = f_2^{(1)} \\ a_{m2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{mj}^{(1)} x_j + \ldots + a_{mm}^{(1)} x_m = f_m^{(1)} \end{cases} \quad (10)$$

Это был первый шаг метода Гаусса. Если теперь $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из системы (9) аналогично можно исключить неизвестное x_2 и прийти к системе, эквивалентной (6) и имеющей матрицу следующей структуры:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & \ldots & x \\ 0 & 1 & x & \ldots & x \\ 0 & 0 & x & \ldots & x \\ 0 & 0 & x & \ldots & x \end{bmatrix}$$

При этом первое уравнение системы (9) остается без изменений. Исключая таким же образом неизвестные $x_3, x_4, \ldots, x_m$, придем окончательно к системе уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1m} x_m = y_1 \\ x_2 + \ldots + c_{2m} x_m = y_2 \\ \ldots \\ x_{m-1} + c_{m-1,m} x_m = y_{m-1} \\ x_m = y_m \end{cases} \quad (11)$$

Матрица этой системы содержит нули всюду ниже главной диагонали (верхняя треугольная матрица).

Получение системы (11) называют прямым ходом метода Гаусса. Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из системы (9).

$x_m = y_m$, $x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} * x_m$ и т. д.

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} x_i \ , \ i = m-1, \ldots, 1; \ x_m = y_m$$

2.1.2 Расчетные формулы

Прямой ход:

1) коэффициенты:

$a_{kj}^{(0)} = a_{kj}$, k, j=1,2,..,m

$c_{kj} = \frac{a^{(k-1)}{}_{kj}}{a_{kk}^{k-1}}$; j=k+1,k+2,…,m.

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}$;

i, j=k+1, k+2,…, m, k=1,2,…,m-1;

2) Правые части: $f_K^{(0)} = f_k, y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = 1,2,..,m$

$f_i^k = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k, i = k+1, k+2,...,m$

Коэффициенты c_{ij} и правые части $y_i, i = 1,2,...,m; j = i+1, i+2,....,m$ хранятся в памяти ЭВМ и используются при осуществлении обратного хода.

Обратный ход: $x_m = y_m$

$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} x_j, i = m-1,...,1$

Основным ограничением метода является предположение о том, что все элементы $a_{кк}^{(к-1)}$, на которые проводится деление, отличны от нуля. Число $a_{кк}^{(к-1)}$ называется ведущим элементомна $к$ -том шаге исключения. Даже если какой-то ведущий элемент не равен нулю, а просто близок к нулю, в процессе вычислении может произойти сильное накопление погрешностей. Частично эта проблема решается в методе Гаусса с выбором главного элемента.

Для больших m число действий умножения и деления в методе Гаусса близко к $\frac{m^3}{3}$.

2.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является наибольшим по модулю. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается главный, то есть наибольший по модулю элемент. Тем самым, если $\det A \neq 0$, то в процессе вычислении не будет происходить деления на ноль.

Применяют метод Гаусса с выбором главного элемента по строке. Он эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация переменных.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация уравнений.

Иногда применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент среди всех элементов матрицы системы.

2.3 Обращение матрицы

Нахождение матрицы, обратной матрице А, эквивалентно решению матричного уравнения:

$$\mathrm{A}X = \mathrm{E} \tag{12}$$

где E-единичная матрица и X искомая квадратная матрица. Уравнение (12) можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij} \quad i, j = 1,2,\ldots,m \tag{13}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j, \delta_{ij} = 0$,при $i \neq j$.

Заметим, что система (13) распадается на m независимых систем уравнении с одной и той же матрицей А, но с различными правыми частями.

Эти системы имеют вид:

$$A\vec{x}^{(j)} = \delta^{(j)},\ j = 1,2,\ldots,m \tag{14}$$

где $\vec{x}^{j} = \begin{matrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{mj} \end{matrix}$, а у вектора $\vec{\delta}^{(j)}$ равна единице j-тая компонента и равны нулю остальные компоненты.

Для решения системы (14) используется метод Гаусса (обычный или с выбором главного элемента). Поскольку , все системы (14) имеют одну и ту же матрицу А, достаточно один раз совершить прямой ход метода Гаусса. Обратный ход будет для каждого $\vec{\delta}^{(j)}$ свой.

3 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Метод итераций

Рассматривается система

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{15}$$

Считаем, что $a_{i,i} \neq 0$ (i=1,2,…..,n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

Разрешим первое уравнение (15) относительно x_1, второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n \\ ---------- \\ x_n = \beta_n + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \tag{16}$$

где $\beta_i = \dfrac{b_{ij}}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, при $i \neq j$

$\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$,

$i, j = 1,2,3,...,n$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Систему (16) можно записать в виде

$$\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x} \qquad (16')$$

Систему $(16')$ будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем, например,

$\vec{x}^{(0)} = \vec{\beta}$. Далее последовательно строим:

$\vec{x}^{(1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(0)}$ (первое приближение)

$\vec{x}^{(2)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(1)}$ (второе приближение) и т.д.

- - - - - - - - - - - -

$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(k)}$ (k=0,1,2,…..)(17)

Если последовательность приближений $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел $\vec{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$, то этот предел является решением системы (16), действительно:

$\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$

$\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}$, т.е. $\vec{x}$ удовлетворяет $(16')$, следовательно, и (15).

Напишем формулы приближений:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k)} \\ \alpha_{ii} = 0 \end{cases} \qquad (17')$$

i=1,…,n; k=0,1,2,…

Вообще говоря, требования $\alpha_{ii} = 0$ можно снять.

Метод последовательных приближений, определяемых формулой (17) или $(17')$ носит название метода итераций (или метод Якоби). Процесс итераций хорошо сходится, если элементы матрицы α малы по абсолютной величине. Иными словами модули диагональных коэффициентов системы (15) должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой системы.

Пример.

$$\begin{cases} 4x_1+0.2x_2-0.08x_3=8 \\ 0.09x_1+3x_2-0.15x_3=9 \\ 0.04x_1-0.08x_2+4x_3=20 \end{cases}$$

Результат.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

Замечания. Необязательно брать $\vec{x}^0 = \vec{\beta}$, а можно взять произвольный. Сходящийся процесс итерации обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на конечном результате.

Теорема. Если для приведенной системы (16) выполнено по меньшей мере одно из условий

1) $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (i=1,2,…..,n)

или

2) $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$ (j=1,2,…..,n)

то процесс итераций (17) сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

3.2 Приведение линейной системы к виду, удобному для итераций

Теорема сходимости накладывает жесткие условия на коэффициенты данной линейной системы $A\vec{x} = \vec{b}$.

Однако, если detA≠0, то с помощью линейного комбинирования уравнений системы её можно заменить эквивалентной системой $\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}$, такой, что условия теоремы сходимости всегда будут выполнены.

Действительно, умножим (15) на матрицу $D = A^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_{ij}$ - матрица с малыми по модулю элементами: $(A^{-1} - \varepsilon)A\vec{x} = D\vec{b}$

$$\vec{x} - \varepsilon A\vec{x} = D\vec{b} \quad \Rightarrow \vec{x} = \beta + \alpha\vec{x},$$

где $\alpha = \varepsilon A$ и $\beta = D\vec{b}$. Если $\left|\varepsilon_{ij}\right|$ достаточно малы, то очевидно, что система (17) удовлетворяет условиям теоремы сходимости.

Пример.

А $2x_1+9x_2-4x_3+x_4-3=0;$

Б $x_1-2x_2-5x_3-x_4-2=0;$

В $5x_1-3x_2+x_3-4x_4-1=0;$

Г $10x_1+2x_2-x_3+2x_4+4=0;$

В качестве 1 удобно взять Г.

В качестве 3 удобно взять Б.

В качестве 2 удобно взять А-Б.

В качестве 4 удобно взять 2А-Б+2В-Г.

3.3 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, чтобы при выполнении k+1-го приближения переменной x_i учитываются уже вычисленные ранее (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$, $x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i$ (i=1,2,…,n),произвольно выбираем $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить (k+1)-е приближения последующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \cdot x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k$$

- - - - - - - -

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

- - - - - - - -

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} \cdot x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}$$

(k=0,1,2,…)

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но, вообще говоря, он приводит к более громоздким вычислениям.

Пример.

$10x_1+x_2+x_3=12$

$2x_1+10x_2+x_3=13$

$2x_1+2x_2+10x_3=14$

$x_1=1.2-0.1x_2-0.1x_3$

$x_2=1.3-0.2x_1-0.1x_3$

$x_3=1.4-0.2x_1-0.2x_2$

$x_1^{(0)} = 1,2 \quad x_2^{(0)} = 0 \qquad x_3^{(0)} = 0$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2	0	0
1	0,2	1,06	0,948
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1	1	1

3.4 Каноническая форма одношаговых итерационных методов

Каноническая форма итерационных методов имеет вид:

$$B_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = \vec{f}, n = 0,1,...,n_0 \qquad (18)$$

где B_{n+1} - матрица, задающая тот или иной итерационный метод, τ_{n+1} - итерационный параметр.

Предполагается, что задано начальное приближение x_0 и что существуют матрицы B_n^{-1}, $n = 1,2,...,n_0 - 1$. Тогда из уравнения (18) можно

последовательно определить все $x_n, n = 1,2,...,n_0$.Для нахождения x_{n+1} по известным f и x_n достаточно решить систему уравнений:

$B_{n+1}x_{n+1} = F_n$

где $F_n = (B_{n+1} - \tau_{n+1}A)x_n + \tau_{n+1}f$

Итерационный метод называется явным, если $B_n = E$, и неявным, если $B_n \neq E$ как правило, неявные итерационные методы имеет смысл применять лишь в том случае, когда каждую матрицу B_n обратить легче, чем исходную матрицу A.

Итерационный метод называют стационарным, если $B_n = B$ и $\tau_{n+1} = \tau$ не зависит от номера итерации, и не стационарным в противоположном случае.

3.5 Матричная запись методов итерации и Зейделя

Пусть $A = A_1 + D + A_2$, где D–диагональматрице A_1–нижняя треугольная, A_2–верхняя треугольная.

Тогда систему (15) можно представить в виде:

$$(A_1 + D + A_2)\vec{x} = \vec{f} \Rightarrow D\vec{x} = -A_1\vec{x} - A_2\vec{x} + \vec{f} \Rightarrow \vec{x} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \quad (19)$$

Тогда метод итерации выглядит так:

$$\vec{x}^{n+1} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \text{ или } D\vec{x}^{n+1} + (A_1 + A_2)\vec{x}^n = \vec{f} \quad (20)$$

Метод Зейделя записывается в виде:

$$\vec{x}^{n+1} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \text{ или } (D + A_1)\vec{x}^{n+1} + A_2\vec{x}^n = \vec{f} \quad (21)$$

Учитывая, что $A = A_1 + D + A_2$ получим что (19),(20) можно записать в виде:

$D(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) + A\vec{x}^n = \vec{f}$,

$(D + A_i)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) + A\vec{x}^n = \vec{f}$,

из этой записи видно, что если итерационный метод сходится, то он сходится к решению исходной системы уравнений.

Очень часто для ускорения сходимости в итерационные методы входят числовые параметры, которые зависят, вообще говоря, от номера итерации:

$$D\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\tau_{n+1}} + A\vec{x}^n = f$$

$$(D + A_1)\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\tau_{n+1}} + A\vec{x}^n = f$$

Способ выбора итерационных параметров выясняется при исследовании сходимости.

В теории итерационных методов существует два круга вопросов:

а) при каких значениях параметров метод сходится

б) при каких значениях параметров сходимость будет наиболее быстрой (соответственно параметры называются отрицательными).

Кроме выше указанных, используются и многошаговые итерационные методы, в которых $\vec{x}^{n+1}$ определяется через значения $\vec{x}^n$ на двух и более предыдущих итерациях т.е. $\vec{x}^{n+1} = F(\vec{x}^n, \vec{x}^{n-1}, ..., \vec{x}^{n-e})$.

4 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задана непрерывная функция *f(x)* и требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (22)$$

Эта задача обычно решается в два этапа:

1. Отделение корней. Изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т.е. выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Кроме того изучается вопрос о кратности корней. Тем самым, находятся некоторые начальные приближения для корней уравнения (1).

2. Уточнение корней.Строится итерационный процесс, использующий заданное начальное приближение и позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

4.1 Отделение корней

Первая задача решается аналитическими и графическими методами.

Аналитические методы. Если ищутся только действительные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений *f(x)*. Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное число корней уравнения (по меньшей мере один). Выявить по таблице корни четной кратности сложно.

Если функция *f(x)*представляет из себя многочлен $f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то он имеет ровно *n* комплексных корней, не обязательно различных, и все корни лежат внутри круга $|x_p| \le 1 + \frac{1}{|a_n|}\max(|a_0|,|a_1|,...|a_{n-1}|)$

Геометрические методы.По таблице можно построить график функции *y=f(x)* и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Построение графиков зачастую позволяет выявить даже корни четной кратности.

Иногда удается заменить уравнение (15) эквивалентным ему уравнением φ(x)=ψ(x) в котором функции y=φ(x) и y=ψ(x) имеют несложные графики. Например, уравнение xsinx-1=0 удобно преобразовать к виду sinx=1/x. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями исходногоуравнения.

4.2 Уточнение корней

4.2.1 Метод половинного деления (дихотомия)

Пусть мы нашли такие точки x_0, x_1, что $f(x_0)f(x_1) \le 0$, т. е. на отрезке $[x_0, x_1]$ лежит не менее одного корня уравнения. Найдем середину отрезка $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$ и вычислим $f(x_2)$. Из двух половин отрезка выберем ту, для которой $f(x_2)f(x) \le 0$, ибо один из корней лежит на этой половине. Затем, новый отрезок опять делим пополам и выберем ту половину, на концах которой функция имеет разные знаки, и т. д.

Если требуется найти корень с точностью ε, то продолжаем деление пополам до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε. Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.Скорость сходимости невелика: за одну итерацию точность увеличивается примерно вдвое, т. е. уточнение трех цифр требует 10 итераций. Зато точность ответа гарантируется.

Недостатки метода:

1. Для начала расчета надо найти отрезок, на котором функция меняет знак. Если в этом отрезке несколько корней, то заранее неизвестно, к какому из них сойдется процесс (хотя к одному из них сойдется).

2. Метод неприменим к корням четной кратности.

3. Для корней нечетной высокой кратности он сходится, но менее точен и хуже устойчив к ошибкам округления, возникающим при вычислении *f(x)*.

4. На системы уравнений дихотомия не обобщается.

4.3 Удаление корней

Один из недостатков дихотомии – сходимость неизвестно к какому корню – имеется почти у всех итерационных методов. Его можно устранить удалением уже найденного корня. Если $\bar{x}_1$ есть простой корень уравнения (15) и *f(x)* –непрерывна, то вспомогательная функция $g(x) = \frac{f(x)}{x - \bar{x}_1}$ непрерывна, причем все нули функций *f(x)* и *g(x)* совпадают, за исключением $\bar{x}_1$, ибо $g(\bar{x}_1) \ne 0$. Если $\bar{x}_1$ - кратный корень, уравнения (1), то он будет нулем *g(x)* кратности на единицу меньше; остальные нули обеих функций по-прежнему будут одинаковы. Поэтому найденный корень можно удалить, т. е. перейти к функции *g(x)*. Тогда нахождение остальных нулей *f(x)* сведется к нахождению нулей *g(x)*. Когда мы найдем какой-нибудь корень $\bar{x}_2$ функции *g(x)*, то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию $\varphi(x) = \frac{g(x)}{x - \bar{x}_2} = \frac{f(x)}{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)}$. Так можно последовательно найти все корни *f(x)*.

5 МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ, МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОД СЕКУЩИХ

5.1 Метод простых итераций

Заменим уравнение (15) эквивалентным ему уравнением $x=\varphi(x)$. Это можно сделать многими способами, например, положив $\varphi(x) \equiv x+\psi(x)f(x)$, где $\psi(x)$- произвольная непрерывная знакопостоянная функция. Выберем некоторое нулевое приближение x_0 и вычислим дальнейшие приближения по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,2,..... \tag{23}$$

Очевидно, если x_n стремится к некоторому пределу $\bar{x}$, то этот предел есть корень исходного уравнения.

Исследуем условия сходимости. Если $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную, тогда

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = (x_n - \bar{x})\varphi'(\xi)\,, \tag{24}$$

где точка ξ лежит между точками x_n и $\bar{x}$. Поэтому если всюду $\varphi'(x) \le q < 1$, то отрезки $|x_n - \bar{x}|$ убывают не медленней членов геометрической прогрессии со знаменателем $q<1$ и последовательность x_n сходится при любом нулевом приближении. Если $\varphi'(\bar{x}) > 1$, то в силу непрерывности $\varphi'(x) > 1$ и в некоторой, окрестности корня; в этом случае итерации не могут сходиться. Если $\varphi'(\bar{x}) < 1$, но вдали от корня $\varphi'(x) > 1$, то итерации сходятся, если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню; при произвольном нулевом приближении сходимости может не быть. Очевидно, что чем меньше q, тем быстрей сходимость.

5.2 Метод Ньютона

Он называется также методом касательных или методом линеаризации. Если x_n есть некоторое приближение к корню $\bar{x}$, а $f(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение (15) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n) f'(\xi)$$

Приближенно заменяя $f'(\xi)$ на значение в известной точке x_n, получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{25}$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика *y=f(x)* касательной к нему.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай метода простых итераций, если положить $\varphi(x) = x - [f(x)/f'(x)]$. Тогда $\varphi'(x) = (ff''/f'^2)$. Если $\bar{x}$ есть *p*-кратныйкорень уравнения (1), то вблизи него $f(x) \approx a(x-\bar{x})^p$; отсюда нетрудно получить $\varphi'(\bar{x}) = (p-1)/p$, т. е. $0 \le \varphi'(\bar{x}) < 1$. Для простого корня *p=1* и $\varphi'(\bar{x}) = 0$. Используя результаты предыдущего пункта, можно сформулировать следующие условия сходимости итераций.

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерациисходятся; скорость сходимости велика для простого корня и соответствует скорости геометрической прогрессии для кратного корня. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду $|ff''|/(f')^2$, в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

Оценим скорость сходимости вблизи простого корня. По определению простых итераций, $\bar{x} - x_n = \varphi(\bar{x}) - \varphi(x_n)$. Разлагая правую часть по формуле Тейлора и учитывая равенство $\varphi'(\bar{x}) = 0$, получим

$$x_n - \bar{x} = \frac{1}{2}(x_{n-1} - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \xi \in (x_{n-1}, \bar{x}), \tag{26}$$

т. е. погрешность очередного приближения примерно равна квадрату погрешности предыдущего приближения. Например, если *(n-1)* –я итерация давала 3 верных знака, то *n*-я даст примерно 6 верных знаков, а *(n+1)*-я - примерно 12 знаков. Это иллюстрирует быструю сходимость вблизи корня. Разумеется, вдали от корня подобные соображения неприменимы.

Пример. Рассмотрим решение уравнения $f(x) \equiv x^2 - a = 0$. Тогда общая формула метода Ньютона принимает вид $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

5.3 Модифицированный метод Ньютона

Следующую формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \tag{27}$$

применяют в том случае, когда хотят избежать многократного вычисления производной $f'(x)$. Метод (26) предъявляет меньше требований к выбору начального приближения x_0 и гарантирует отсутствие деления на 0,

если $f'(x_0) \neq 0$, однако обладает лишь линейной сходимостью, т.е. $x_{n+1} - \bar{x} = O(x_n - \bar{x})$.

5.4 Метод секущих

В методе Ньютона требуется вычислять производную функции, что не всегда удобно. Можно заменить производную первой разделенной разностью, найденной по двум последним итерациям, т. е. заменить касательную секущей.

Получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad (28)$$

Для начала процесса надо задать x_0 и x_1.

Такие процессы, где для вычисления очередного приближения надо знать два предыдущих, называют двухшаговыми. Эти, казалось бы, небольшие изменения сильно влияют на характер итераций. Скорость сходимости также изменяется. Скорость сходимости можно оценить, разлагая все функции в (28) по формуле Тейлора с центром $\bar{x}$. Получим с точностью до бесконечно малых более высокого порядка:

$$x_{n+1} - \bar{x} = a^{1/\beta}(x_n - \bar{x})^{\beta}, \quad \beta \approx 1{,}62, \quad (1/\beta) \approx 0{,}62 \qquad (29)$$

В то время как в методе Ньютона ошибка убывает быстрей (соответствуя $\beta = 2$). Но в методе Ньютона на каждой итерации надо вычислять и функцию, и производную, а в методе секущих - только функцию. Поэтому при одинаковом объеме вычислений в методе секущих можно сделать вдвое больше итераций и получить более высокую точность.

В знаменателе формулы (28) стоит разность значений функции. Вдали от корня это несущественно, но вблизи корня, особенно корня высокой кратности, значения функции малы и очень близки. Возникает потеря значащих цифр, приводящая к «разболтке» счета. Это ограничивает точность, с которой можно найти корень; для простых корней это ограничение невелико, а для кратных может быть существенным. Заметим, что приводить формулу (28) к общему знаменателю не следует: увеличится потеря точности в расчетах. От "разболтки" страхуются так называемым приемом Гарвика. Выбирают не очень малое ε, ведут итерации до выполнения условия $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ и затем продолжают расчет до тех пор, пока $|x_{n+1} - x_n|$ убывают. Первое же возрастание обычно означает начало «разболтки»; тогда расчет прекращают и последнюю итерацию не используют.

6 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значению функции f(x) в нескольких точках отрезка восстановить ее значение в остальных точках этого отрезка. Разумеется, эта задача имеет сколь-угодно много решений. Задача интерполирования возникает, например, в том случае, когда известны результаты измерений $y_k = f(x_k)$ некоторой физической величины $f(x)$ в точках $x_k, k = 0,1,...,n$ и требуется определить значения в других точках.

6.1 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть на отрезки $a \le x \le b$ заданы точками $x_k, k = 0,1,...,n$ (узлы интерполирования), в которых известны значения функции $f(x)$. Задача интегрирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{30}$$

степени n, значение, которого в заданных точках $x_k, k = 0,1,...,n$ совпадают со значениями функции $f(x_n)$ в этих точках.

Для любой непрерывной функции $f(x_n)$ сформулированная задача имеет единственное решение. Действительно для отыскания коэффициентов $a_0, a_1,...,a_n$ получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = f(x_i) \\ &i = 0,1,...,n \end{aligned} \tag{31}$$

Определитель которого (определитель Вандермонда) отличен от нуля, если среди точек $x_i, i = 0,1,...,n$ нет совпадающих.

Многочлен $L_n(x)$ удовлетворяющий условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i); i = 0,1,...,n \tag{32}$$

называется интерполяционным многочленам для функции $f(x)$ построенным по узлам $\{x_i\}_0^n$.

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить $L_n(x)$ в виде линейной комбинации:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k) \tag{33}$$

значений функции $f(x)$ в узлах интегрирования.

Найдем явное выражение для коэффициентов $C_k(x)$. Из условий (32) получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n(x_i) f(x_k) = f(x_i) \; ; \; i = 0,1,...,n$$

Эти соотношения будут выполнены, если на функции $C_k(x)$ наложить условия: $C_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$, $i = 0,1,...,n$, которые означают, что каждая из функции $C_k(x), i = 0,1,...,n$ имеет не менее n нулей на $[a,b]$. Поскольку $L_n(x)$ - многочлен степени n, коэффициенты $C_k(x)$ естественно искать также в виде многочленов степени n, а именно в виде $C_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)$. Из условия $C_k(x_k) = 1$ находим:

$$\lambda_k^{-1} = (x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)$$

Таким образом:

$$C_k(x) = \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}. \tag{34}$$

Часто коэффициенты $C_k(x)$ записывают в другом виде. Введем многочлен $\omega(x)$ степени n+1:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})...(x - x_n) \tag{35}$$

тогда $\prod_{j \neq k} (x - x_j) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)}$

$$\omega' = (x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n) \Rightarrow$$

$$\prod_{j \neq k} (x_k - x_j) = \omega'(x_k) \Rightarrow C_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) \tag{36}$$

или

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} f(x_k) \tag{37}$$

6.2 Интерполяционная формула Ньютона

Пусть в узлах $x_k \in [ab], k = 0,1,...,n$ известны значения функции $f(x)$. Предполагаем, что среди точек x_k нет совпадающих.

Разделенными разностями первого порядка называются отношения:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, i, j = 0,1,...,n; i \neq j$$

Разделенные разности второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots, f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}$$

Аналогично определяются разделенные разности более высокого порядка. Например, если известны разности n-го порядка

$f(x_j, x_{j+1},...,x_{j+k}), f(x_{j+1}, x_{j+2},...,x_{j+k+1})$, то разделенная разность (к+1)-го порядка определяется так:

$$f(x_j, x_{j+1},...,x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2},...,x_{j+k+1}) - f(x_j,...,x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

Разделенная разность к-го порядка следующим образом выражается через значение функции $f(x)$ в узлах:

$$f(x_j, x_{j+1},...,x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{e \neq i \\ e=j}}^{j+k} (x_i - x_e)}$$

Интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,f(x_0,x_1,\ldots,x_n) \qquad (38)$$

Можно показать, что $P_n(x)=L_n(x)$.

Интерполяционную формулу Ньютона удобнее применять в том случае, когда интерполируется одна и та же функция f(x), но число узлов постепенно увеличивается. Если узлы интерполяции фиксированы и интерполируется не одна, а несколько функций, то удобнее пользоваться формулой Лагранжа.

6.3 Погрешность интерполирования

Заменяя функцию f(x) интерполяционным многочленом Ln (x), мы допускаем погрешность rn (x) = f(x) - Ln (x), которая называется погрешностью интерполирования или, что то же самое, остаточным членом интерполяционной формулы. Ясно, что в углах интерполирования эта погрешность равна нулю.

Оказывается, можно доказать, что погрешность интерполирования можно представить в виде:

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \qquad (39)$$

где ξ некоторая точка $\in[a,b]$

$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$

Из этой формулы следует оценка:

$$\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|, \qquad (40)$$

где $M_{n+1}=\sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

В частности, если $f(x)$ - алгебраический многочлен степени n, то интерполирование, проведенное по любым точкам $x_0,x_1,\ldots,x_n$, осуществляется точно, т.е. $L_n(x)\equiv f(x)$

Поскольку многочлены Лагранжа и Ньютона отличаются только формой записи, представление погрешности в форме (39) справедливо как для формулы Лагранжа, так и для формулы Ньютона.

6.4 Оптимальный выбор узлов интерполирования

Величину $|\omega(x)|$, входящую в оценку (40), можно минимизировать за счет выбора узлов интерполирования, т.е. подобрать узлы $x_k \in [a,b], k = 0,1,...,$ и так чтобы минимизировать величину $\max\limits_{x\in[a,b]}|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$

Эта задача решается с помощью многочлена Чебышева:

$$T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n+1}}\cos((n+1)\arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}) \qquad (41)$$

причем в качестве узлов интерполирования надо взять корни многочлена (41), т.е. точки

$x_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, k = 0,1,...,n$ при этом $\max\limits_{x\in[a,b]}|\omega(x)| = \frac{(b+a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$ и оценка (11) примет вид $|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$.

6.5 Интерполирование с кратными узлами

Интерполяционный многочлен Эрмита.

В узлах $x_k \in [a,b], k = 0,1,...,m$, среди которых нет совпадающих узлов, заданы значения функции $f(x_k)$ и её производных $f^{(i)}(x_k)$ до порядка $N_k - 1$ включительно, $i = 1,2,...,N_k - 1$. Таким образом, в каждой точке $x_k, k = 0,1,..., f^{(N_k-1)}(x_k)$ и, следовательно, всего известно $N_0 + N_1 + ... + M_m$ величин. Требуется построить алгебраический многочлен $H_n(x)$ степени $n = N_0 + N_1 + ... + M_m - 1$, для которого

$$H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k) \qquad (42)$$

$k = 0,1,...,m; i = 0,1,...,N_k - 1$

Многочлен $H_n(x)$, удовлетворяющий условиям (13) называется интерполяционным многочленом Эрмита для функции $f(x)$. Число N_k называется кратностью узла x_k.

7 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНАМИ

Интерполирование многочленом Лагранжа или Ньютона на всем отрезке [a,b] с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводит к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязано приводить к повышению точности.

Чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок [a,b] разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом не высокой степени (кусочно-полиномиальная интерполяция).

Сплайн-функцией или сплайном называют кусочно-полиномиальную функцию, определённую на отрезке [a,b] и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Преимущества сплайнов: сходимость и устойчивость процесса вычислений.

7.1 Построение кубического сплайна

Пусть на отрезке [a,b] задана непрерывная функция $f(x)$. Введём сетку: $a = x_0 < x_1 < ..... < x_{-1} < x_n = b$ и обозначим $f_i = f(x_i), i = 0,1,...,u$.

Сплайном, соответствующим данной функции $f(x)$ и данным узлам $\{x_i\}^N{}_{i=0}$ называется функция $S(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,N$ функция $S(x)$ является многочленом 3-ей степени.

б) функция $S(x)$, а также её первая и вторая производные непрерывны на [a,b];

в) $S(x_i) = f(x_i), i = 0,1,...,N$

последнее условие называется условием интерполирования, а сплайн, определяемый условиями а)-в), называется также интерполяционным кубическим сплайном.

Построение кубического сплайна.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,N$ будем искать функцию $S(x) - S_i(x)$ в виде многочлена 3-ей степени.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x \cdot x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d^i}{6}(x - x_i)^3$$

$$x_{i-1} \le x \le x_i, i = 1,2,...,N$$

a_i, b_i, c_i, d_i - требуется найти, ясно, что:

$$a_i = S_i(x_i), b_i = S_i', c_i = S_i''(x_i), d_i = S_i'''(x_i)$$

Из условий интерполирования $S(x_i) = f(x_i), i = 0,1,...,N$ получаем, что $a_i = f(x_i); i = 1,2,...,N$ доопределим, кроме того, $a_0 = f(x_0)$

Далее требование непрерывности функции $S(x)$ приводит к условиям:
$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), i = 1,2,...,N-1 \Rightarrow$

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3, i = 0,1,...,N-1.$$

Обозначая $h_i = x_i - x_{i-1}$, получим:

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}; i = 0,1,...,N-1 \quad (43)$$

Условия непрерывности первой производной
$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i); i = 1,2,...,N-1$ приводят к уравнениям

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = 2,3,..., \quad (44)$$

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения:

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}; i = 2,3,..., \quad (45)$$

Объединяя систему (14) – (16), получим систему 3N-2 уравнений относительно 3N неизвестных $b_i, c_i, d_i, i = 1,2,...,N$

Два недостающих уравнения получают, задавая те или иные граничные условия для $S(x)$. Предположим, например, что $f''(a) = f''(b) = 0$. Тогда естественно требовать, чтобы $S''(a) = S''(b) = 0 \Rightarrow S_1''(x_0) = 0, S''_N(x_N) = 0$, т.е. $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$.

Заметим, что условие $c_1 - d_1 h_1 = 0, c_N = 0$ совпадает с уравнением (45) при i=1, если положить $c_0 = 0$. Таким образом, приходили к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

$$h_i d_i = c_i - c_{i-1}, i = 1,2,...,N, c_0 = c_n - 0 \quad (46)$$

$$h_i c_i - \frac{h_i^2}{2} d_i = b_i - b_{i-1}; i = 2,3,...,N \quad (47)$$

$$h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}; i = 1,2,...,N \quad (48)$$

Убедимся в том, что эта система имеет единственное решение. Исключим из (46) – (48) переменные $b_i, d_i, i = 1,2,...,N-1$ и получим систему, содержащую только $c_i, i = 1,2,...,N-1$

Для этого рассмотрим два соседних уравнения (48)

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$b_{i-1} = \frac{h_{i-1}}{2} c_{i-1} - \frac{h^2{}_{i-1}}{6} d_{i-1} + \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

и вычтем второе уравнение из первого. Тогда получим:

$$b_i - b_{i-1} = \frac{1}{2}(h_i c_i - h_{i-1} c_{i-1}) - \frac{1}{6}(h_i{}^2 d_i - h_{i-1}{}^2 d_{i-1}) + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}$$

Подставляя найденное выражение для $b_i - b_{i-1}$ в правую часть уравнения (47), получим

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - \frac{h^2{}_{i-1}}{3} d_{i-1} - \frac{2h_i^2}{3} d_i = 2\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right) \quad (49)$$

Далее из уравнения (46) получаем:

$$h_i{}^2 d_i = h_i (c_i - c_{i-1}), h_{i-1}{}^2 d_{i-1} = h_{i-1}(c_{i-1} - c_{i-2})$$

и подставляя эти уравнения в (20), получим:

$$h_i c_{i-2} + 2(h_{i-1} + h_i) c_{i-1} + h_i c_i = 6\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$$

Окончательно для определения коэффициентов c_i получаем систему уравнений.

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right)$$
$$i = 1,2,\ldots,N-1, c_0 = c_N = 0 \qquad (50)$$

В силу диагонального преобладания системаимеет единственное решение. Матрица этой системы трёхдиагональная, её решение легко найти методом прогонки(который будет рассмотрен позже). По найденным коэффициентам c_i коэффициенты b_i и d_i определяются с помощью явных формул:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$
$$i = 1,2,\ldots,N \qquad (51)$$

Таким образом, доказано, что 7-й единственный кубический сплайн, определяемый условиями а) – в) и граничными условиями $S''(a) = S''(b) = 0$. Заметим, что можно рассматривать и другие граничные условия.

7.2 Сходимость процесса интерполирования кубическими сплайнами

Покажем, что интерполирование кубическими сплайнами является сходящимся процессом, т.е. при неограниченном увеличении числа узлов N соответствующая последовательность сплайн – функций сходится к интерполируемой функции f(x).

Оценки погрешности интерполяции r(x) = f(x) – S(x) зависят от выбора сеток и от гладкости f(x). Для простоты изложения будем рассматривать последовательность равномерных сеток:

ωh = {xi = a + ih, i = 0,1…N}

с шагом $h = \frac{b-a}{N}$. В этом случае основная система уравнений (50) принимает вид:

$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6f_{\bar{x}x,i}$, i = 1,2…N-1; c0 = cN = 0 (23)

где обозначено $f_{\bar{x}x,i} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$.

От функции f(x) требуем: f(x) ∈ c(4)[a, b], кроме того $f''(a) = f''(b) = 0$ и такие же условия для сплайнов. Обозначим: $\|g(x)\|_{c[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|g(x)|, \quad M_4 = \|f^4(x)\|_{c[a,b]}$.

Пусть Sh(x) – кубический сплайн, построенный для функции f(x) на сетке ωh. Оказывается, имеет место следующая теорема:

Теорема: Для $f(x) \in c^{(4)}[a,b]$ справедливы следующие оценки:

$\|f(x) - S_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^4$

$\|f'(x) - S'_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^3$

$\|f''(x) - S''_h(x)\|_{c[a,b]} \le M_4 h^2$

Из этих оценок следует, что при h→0, т.е., при N→∞ последовательности $S_h^{(i)}$, i = 0,1,2, сходятся соответственно к функциям $f^{(i)}(x)$, i = 0,1,2.

8 ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

8.1 Квадратурные формулы

Рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов

$$I = \int_b^a f(x)dx \tag{52}$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) \tag{53}$$

где ck – числовые коэффициенты и xk – точки отрезка [a,b], k=0,1,…,N.

Приближенное равенство $\int_b^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$ называется квадратурной формулой, а сумма вида (2) – квадратурной суммой. Точки xk называются узлами квадратурной формулы, а числа ck - коэффициентами квадратурной формулы. Разность $\psi_n = \int_b^a f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$ называется погрешностью квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора коэффициентов.

Введем на [a, b] равномерную сетку с шагом h, т.е. множество точек $\omega_{\mathrm{h}} = \{x_{\mathrm{i}} = a + ih,\ \ i = 0,1,\ldots,N;\ hn = b - a\}$ и представим интеграл (52) в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

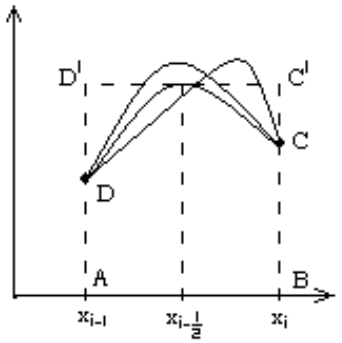
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{54}$$

Для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке [a, b] достаточно построить квадратурную формулу для интеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{55}$$

на частичном отрезке [xi-1, xi] и воспользоваться свойством (53).

8.2 Формула прямоугольников



$ABCD \approx ABC'D'$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-\frac{1}{2}})h \tag{56}$$

(56) – формула прямоугольников на частичном отрезке [xi-1, xi].

Погрешность формулы (56) определяется величиной: $\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-\frac{1}{2}})h$.

Оказывается

$$|\psi_i| \le \frac{h^3}{24} M_{2,i}, \tag{57}$$

где $M_{2,i} = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|$

Суммируя равенство (56) по i от 1 до N получим составную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}})h. \tag{58}$$

Погрешность этой формулы

$$\psi = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}})h \quad , \tag{59}$$

равна сумме погрешностей по всем частичным отрезкам.
Оказывается:

$$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{24} M_2 \text{, где } M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \tag{60}$$

Т.е. погрешность формулы прямоугольников на всем отрезке есть величина 0(h2), это означает, что квадратурная формула (58) имеет второй порядок точности.

8.3 Формула трапеций

На частичном отрезке площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямолинейной трапеции:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h \tag{61}$$

После суммирования составная формула трапеций принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} h = h(0{,}5 f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1} + 0{,}5 f_N) \tag{62}$$

где $f_i = f(x_i); \quad i = 0,1,\ldots,N; \quad hN = b-a$.
Погрешность этой формулы оценивается следующим образом:

$$|\psi| \le \frac{h^2(b-a)}{12} M_2, \quad M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Таким образом, формула трапеций имеет, так же как и формула прямоугольников, второй порядок точности $\psi = 0(h^2)$, но её погрешность оценивается величиной в два раза большей.

8.4 Формула Симпсона

При аппроксимации интеграла (55) заменим функцию f(x) параболой, проходящей через точки $(x_j, f(x_j)),\ j = i-1, i-0{,}5, i$, т.е представим приближенно f(x) в виде $f(x) \approx L_{2,i}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$ где $L_{2,i}(x)$ интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени,

$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2}((x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i) f_{i-1} - 2(x - x_{i-1})(x - x_i) f_{i-\frac{1}{2}} + (x - x_i)(x - x_{i-\frac{1}{2}}) f_i)$$

Проводя интегрирование, получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{2,i}(x)dx = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i), \quad h = x_i - x_{i-1}$$

.

Таким образом, приходим к равенству

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i) \quad , \qquad (63)$$

которое называется формулой Симпсона или формулой парабол.
На всем отрезке [a,b] формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i-1}^{N} \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4 f_{i-1/2} + f_i) =$$

$$= \frac{h}{6}[f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{N-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \ldots + f_{N-\frac{1}{2}})] \qquad (64)$$

Чтобы не использовать дробных индексов, можно обозначить $x_i = a + 0{,}5hi, \quad f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,2N, \quad hN = b - a$ и записать формулу Симпсона в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{2N-1})] \quad . \qquad (65)$$

Погрешность составной формулы Симпсона (65) оценивается так: $|\psi| \le \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4, \quad hN = b - a, \quad M_4 = \sup_{x \in [a,b]} \left| f^{(IV)}(x) \right|$ |f(|V)(x)|.

Отсюда видно, что формула Симпсона существенно точнее, чем формулы прямоугольников и трапеций. На частичном отрезке она имеет точность 0(h5), а на всем отрезке – 0(h4)

Пример.

Вычислить интеграл $\int_0^{10} x^2 dx$, сетка x0=0, x1=2, x0=4,…, x5=10, h=2

По формуле прямоугольников:

$$\int_0^{10} x^2 dx = \sum_{i=1}^{M} f(x_{i-\frac{1}{2}})h = 2(f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)) = z\cdot(1+9+25+49+81) = 2\cdot 165 = 330$$

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} \approx 333{,}33$$

С др. стороны - точное значение.

$$\frac{h^2\cdot(b-a)}{24}\cdot 2 = \frac{4\cdot 10}{24} = \frac{5\cdot 2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

По формуле трапеций:

$$\int_0^{10} x^2 dx = 2\cdot(0{,}5\cdot f(0)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\cdot 0{,}5) = 2\cdot(0+4+16+36+64+50) =$$

$$= 2\cdot 170 = 340$$

$$\frac{\psi^2(b-a)}{12}\cdot M_2 = \frac{4\cdot 10}{12}\cdot 2 = \frac{20}{3} \approx 6{,}666$$

По формуле Симпсона:

$$\int_0^{10} x^2 dx = \frac{h}{6}[f_0 + f_n + 2(f_1+\ldots+f_{n-1}) + 4(f_{\frac{1}{2}} + f_{\frac{3}{2}} + \ldots + f_{n-\frac{1}{2}})] = \frac{2}{6}[0+100+2(4+16+36+64)+$$

$$+4(1+9+25+49+81)] = \frac{1}{3}[100+2\cdot 120+4\cdot 165] = \frac{100+240+660}{3} = \frac{1000}{3} \approx 333{,}33$$

9 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $u(x)$ по заданным в конечном числе точек значениям этой функции.

Введем на $[a,b]$ сетку: $w_h = \{x_i = a + ih; i = 0,1,...,N; hn = b - a\}$ и определены значения $u_i = u(x_i)$ функции $u(x)$ в точках сетки.

В качестве приближенного значения $u'(x_i)$ можно взять, например, любые из следующих разностных отношений:

$$u_{\overline{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, u_{\overline{\underline{x}},i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \tag{66}$$

Выписанные здесь разностные отношения называются, соответственно, левой, правой и центральной разностными производными функции $u(x)$ в точках $x = x_i$.

Если точка x_i фиксированная, а шаг $h \to 0$ (при этом $N \to \infty$), то каждое из упомянутых разностных отношений стремится к значению производной функции $u(x)$ в точке x_i. Поэтому в качестве приближенного значения $u'(x)$ можно взять любое из этих разностных отношений.

Получим выражение для погрешности. Например, левой разностной производной в точках $x = x_i$

$$u_{\overline{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{u(x) - u\{x - h)}{h}$$

По формуле Тейлора получим:

$$\begin{aligned} & u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\xi), \xi \in (x-h, x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow u_{\overline{x},i} = u'(x) - \frac{h^2}{2}u''(\xi) \end{aligned} \tag{67}$$

Погрешность $-\frac{h^2}{2}u''(\xi)$ называют погрешностью аппроксимации ($O(h)$) .

Для других формул:

$$u_{x,i} = u'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\xi^{(1)}), \xi^{(1)} \in (x_i, x_{i+1}) \tag{68}$$

$$u_{\overline{\underline{x}},i} = u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi^{(2)}), \xi^{(2)} \in (x_{-1i}, x_{i+1}) \tag{69}$$

Из формулы (69) видно, что центральная разностная производная аппроксимирует $u'(x)$ со вторым порядком и следовательно является более точным приближением к $u'(x)$.

Вторую производную $u''(x)$ можно приближенно заменить в точке $x_i \in w_h$ второй разностной производной:

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \qquad (70)$$

Разложение по формуле Тейлора приводит к следующему выражению для погрешности:

$$u_{\bar{x}x,i} - u''(x_i) = \frac{h^2}{12}u^{(IV)}(\xi_i) \qquad (71)$$

т.е. имеет место аппроксимация второго порядка.

Четвертая производная $u^{(IV)}(x_i)$ с точностью до величины $O(h^2)$ аппроксимируется разностным отношением:

$$u_{\bar{x}x\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2}(u_{\bar{x}x,i+1} - 2u_{\bar{x}x,i} + u_{\bar{x}x,i-1}) = \frac{1}{h^4}(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2)}$$

Как правило, значения функции $u(x)$ в точках сетки w_h вычисляются не точно, а с каким-то приближением.

Например, элементарные трансцендентные функции вычисляются с помощью рядов, причем ряды заменяются конечными суммами. Другим источником погрешностей являются погрешности округления.

Оказывается, что погрешность, возникающая при вычислении разностных отношений, намного превосходит погрешность в задании значений функции $u(x)$ и даже может неограниченно возрастать при стремлении шага сетки к нулю. Поэтому операцию вычисления разностных отношений называют некорректной. Поясним это на примере: $u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$.

Данное соотношение хорошо приближает $u'(x_i)$ только в том случае, когда шаг hдостаточно мал. Требование малости величины h, находящейся в знаменатели разностного отношения как раз и является причиной некорректности операции численного дифференцирования. Действительно, пусть вместо точного значения u_i, u_{i-1} вычислены приближенные значения $\hat{u} = u_i + \delta_i, \breve{u}_{i-1} = u_{i-1} + \delta_{i-1}$. Тогда величина $u_{\bar{x},i}$ будет равна величине $u_{\bar{x},i} + \frac{(\delta_i - \delta_{i-1})}{h}$. Следовательно, погрешность I разностной производной окажется равной: $\delta_{\bar{x},i} = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{h}$.

Пусть $|\delta_i| \le \delta, |\delta_{i-1}| \le \delta$, тогда

$$\left|\delta_{\bar{x},i}\right| \le \frac{2\delta}{h} \qquad (72)$$

Из оценки (72) видно, что в следствии малости h погрешность, возникающая при вычислении первой разностной производной, значительно превосходит погрешность вычисления самой функции $u(x)$. Если δ не зависит отh, то погрешность $\delta_{\bar{x},i}$ неограниченно возрастает при $h \to 0$.

Чтобы не происходило существенного понижения точности, надо следить за тем, чтобы погрешность округления имела тот же порядок, что и погрешность аппроксимации. Например, из формулы (67) следует, что погрешность аппроксимации $\le 0.5h * M_2$, где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |u''(x)|$. Естественно потребовать, чтобы и погрешность округления была бы сравнима с погрешностью аппроксимации, например,

$$\frac{2\delta}{h} \le \frac{M_2 h}{2} \qquad (73)$$

где M_2 не зависит от h. Это означает, что погрешность δ при вычислении значений функции $u(x_i)$ должна быть величиной $O(h^2)$.

С другой стороны, неравенство (73) показывает, что если величина δ задана и мы не можем ее менять, то вычисления надо проводить не с произвольно малым шагом h, а с шагом, удовлетворяющим условию: $h \ge h_0$, где $h_0 2\sqrt{\frac{\delta}{M^2}}$.

При вычислении производных более высокого порядка, когда в знаменатель разностного соотношения входит $h_k, k>1$, влияние неточности в здании $u(x_i)$ сказывается еще сильнее. Например, при вычислении разностного отношения $u_{\bar{x}x\bar{x}x,i}$ погрешность округления является $O(\delta h^{-u})$, где δ - граница погрешности округления функции $u(x)$. В этом случае для того, чтобы погрешность определения $\delta_{\bar{x}x\bar{x}x,i}$ была сравнима с погрешностью аппроксимации, надо потребовать, чтобы $h \ge h_0$, где $h_0 = O(\delta^{-\frac{1}{6}})$, либо проводить вычисления $u(x_i)$ с погрешностью $\delta = O(h^6)$. Например, если $\delta \approx 10^{-12}$, то шаг hнадо брать примерно равным 0,01.

При этом погрешность аппроксимации и погрешность округления будут примерно равными 10^{-4}.

Вычисления производной $u'(x)$ по заданной функции $u(x)$ также является некорректной операцией в том смысле, что для ограниченной функции $u(x)$ производная $u'(x)$ может быть сколь угодно большой.

10 МНОГОШАГОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ. ПОНЯТИЕ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

10.1 Понятие обыкновенного дифференциального уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную t, неизвестную функцию $u(t)$ и ее производные до некоторого порядка n.

$$f(t,u(t),u'(t),u''(t),\ldots,u^{(n)}(t))=0$$

Порядок старшей производной, входящей в уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

Системой обыкновенных дифференциальных уравнений называется система уравнений, каждое из которых связывает независимую переменную t, компоненты неизвестной вектор- функции $\vec{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t))$ и их производные до некоторого порядка n.

$$\vec{F}(t,\vec{u}(t),\vec{u}'(t),\vec{u}''(t),\ldots,\vec{u}^{(n)}(t))=0$$

Примеры.

$$\frac{du}{dt}=-au$$

1) Уравнение описывает радиоактивный распад вещества, где $u(t)$ - масса радиоактивного вещества в момент времени t, $a>0$ - известная постоянная величина, называемая сечением распада.

2) Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x''(t)=-\dfrac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ y''(t)=-\dfrac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

описывает движение планеты вокруг Солнца. Здесь $x(t),\ y(t)$ - неизвестные координаты планеты относительно Солнца в момент времени t.

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений любого порядка.

Известно, что любое обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$u^{(n)}(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t),\ldots,u^{(n-1)}(t))$$

с помощью замены

$$u_0(t)=u(t),\ u_1(t)=u'(t),\ u_2(t)=u''(t),\ldots,u_n(t)=u^{(n)}(t)$$

можно свести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} u_0'(t) = u_1(t) \\ u_1(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_3(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-2}'(t) = u_{n-1}(t) \\ u_{n-1}'(t) = f(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{cases}.$$

Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad i = 1,2,...,m$$

записывая их для краткости в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}).$$

Различают три основных типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

10.2 Задача Коши

Рассматривается следующая задача: найти неизвестную вектор-функцию $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$, удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad t > 0 \tag{74}$$

и начальному условию:

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^{(0)} \tag{75}$$

Если расписать систему (74)-(75) покомпонентно, то получим:

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad t > 0 \\ u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{76}$$

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если функции $f_i, i = 1,2,...,m$ непрерывны по всем аргументам в замкнутой области: $D = \{|t| \le a, \quad |u_i - u_i^0| \le b, \quad i = 1,2,...,m\}$, откуда следует их ограниченность, т.е. существует постоянная $M > 0$ такая, что всюду в D: $|f_i| \le M, \quad i = 1,2,\ldots,m$ функции $f_i, i = 1,2,...,m$ в области D удовлетворяют условию Липшица по аргументам $u_1, u_2, \ldots, u_m$, т.е.

$$|f_i(t,u_1',u_2',\ldots,u_m') - f_i(t,u_1'',u_2'',\ldots,u_m'')| \le L\left(|u_1' - u_1''| + |u_2' - u_2''| + \ldots + |u_m' - u_m''|\right)$$

для любых точек $(t,u_1',\ldots,u_m')$ и $(t,u_1'',\ldots,u_m'')$ в области D то существует единственное решение $\vec{u}(t) = (u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t))$ системы (74), определенное при $|t| \le t_0 = \min(a, \frac{b}{M})$ и принимающее при $t = 0$ заданные начальные значения (75).

В дальнейшем предполагаем, что решение задачи (74)-(75) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Решить задачу (74)-(75) точно, т.е. выразить решение через элементарные функции или представить его при помощи квадратур от элементарных функций, удается далеко не всегда, особенно если правая часть уравнения (74) представляет из себя нелинейную функцию. Поэтому приходится решать ее с использованием численных методов.

10.3 Случай одного уравнения

Рассмотрим случай когда $m = 1$, т.е. задача (3) представляет из себя лишь одно уравнение с одной неизвестной функцией $u(t)$ и одно начальное условие:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t,u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{77}$$

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$, т.е. рассмотрим множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2,\ldots\}$.

Будем обозначать через $u(t)$ точное решение задачи (4), а через $y_n = y(t_n)$ - приближенное. Заметим, что приближенное решение является сеточной функцией, т.е. определено только в точках сетки ω_τ.

11 МНОГОШАГОВЫЕ РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

11.1 Метод Эйлера

Уравнение (77) заменяется разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - f(t_n, y_n) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$y_0 = u_0 \tag{78}$$

тогда решение уравнения находится по формулам: $y_{n+1} = y_n + \tau \cdot f(t_n, y_n), \quad n = 0,1,2,\ldots,$
$y_0 = u_0$

Введем понятие сходимости метода при $\tau \to 0$. Фиксируем точку t и построим последовательность сеток ω_τ таких, что $\tau \to 0$ и $t_n = n\tau = t$ (тогда необходимо $n \to \infty$). Говорят, что метод (78) сходится в точке t, если $|y_n - u(t_n)| \to 0$ при $\tau \to 0$ $t_n = t$. Метод сходится на отрезке $(0,T]$, если он сходится в каждой точке $t \in (0,T]$.

Говорят, что метод имеет р-ый порядок точности, если существует число р>0 такое, что $|y_n - u(t_n)| = O(\tau^p)$ при $\tau \to 0$.

Получим уравнение, которому удовлетворяет погрешность метода $z_n = y_n - u(t_n)$. Подставляя $y_n = z_n + u_n$ в (78), получим

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau} = f(t_n, u_n + z_n) - \frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} \tag{79}$$

Правую часть уравнения (79) можно представить в виде суммы $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$, где

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + f(t_n, u_n)$$
$$\psi_n^{(2)} = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n).$$

Функция $\psi_n^{(1)}$ называется невязкой или погрешностью аппроксимации разностного уравнения (79) на решении исходного уравнения (78). Видно, что невязка представляет собой результат подстановки точного решения $u = u(t)$ в левую часть разностного уравнения (79). Если бы приближенное решение y_n совпадало с точным $u(t_n)$, то невязка равнялась бы нулю. Говорят, что разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение,

если $\psi_n^{(1)} \to 0$ при $\tau \to 0$. Разностный метод имеет p-ый порядок аппроксимации, если $\psi_n^{(1)} = O(\tau^p)$. Оказывается при достаточно общих предположениях порядок точности разностного метода совпадает с порядком аппроксимации.

Порядок аппроксимации метода Эйлера (79) нетрудно найти, используя разложение по формуле Тейлора. Поскольку $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} = u'(t_n) + O(\tau)$ то в силу уравнения (4)

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + f(t_n,u_n) = -u'(t_n) - O(\tau) + f(t_n,u_n) = -u'(t_n) + f(t_n,u_n) - O(\tau) = O(\tau)$$

т.е. метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации. При выводе предполагалась ограниченность $u''(t)$.

Пример 1. Симметричная схема.

Уравнение (77) заменяется разностным уравнением

$$\begin{aligned} &\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau} - \frac{1}{2}(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \\ &y_0 = u_0 \end{aligned} \tag{80}$$

Данный метод является неявным, т.к. новое значение y_{n+1} определяется по найденному ранее y_n путем решения уравнения:

$$y_{n+1} - 0{,}5\tau \cdot f(t_{n+1},y_{n+1}) = F_n = y_n + 0{,}5\tau \cdot f(t_n,y_n)$$

Определим порядок аппроксимации метода, для чего разложим невязку по формуле Тейлора:

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau} + \frac{1}{2}(f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})) = -u_n' - \frac{\tau}{2}u_n'' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}(u_n' + u_{n+1}') =$$

$$= -u_n' - \frac{\tau}{2}u_n'' + \frac{1}{2}(u_n' + u_n' + \tau \cdot u_n'' + O(\tau^2) = O(\tau^2)$$

Т.е. метод (80) имеет второй порядок аппроксимации.

11.2 Общая схема многошаговых разностных методов

Линейным m- шаговым разностным методом называется система разностных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \ldots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m} \\ &n = m, m+1, \ldots, \end{aligned} \tag{81}$$

где a_k, b_k - числовые коэффициенты, не зависящие от n, $k = 0,1,\ldots,m$, причем $a_0 \neq 0$.

Из формулы видно, что для начала расчета необходимо задать m начальных значений $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Значение y_0 определяется из начального условия $y_0 = u_0$, а для нахождения $y_1, \ldots, y_{m-1}$ можно использовать какой-либо другой метод, например Рунге-Кутта (будет рассмотрен позднее).

Метод (8) называется явным, если $b_0 = 0$ и неявным, если $b_0 \neq 0$. В случае явного метода y_n выражается явным образом через предыдущие значения $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m}$. В случае неявного метода для нахождения y_n приходится решать нелинейное уравнение:

$$\frac{a_0}{\tau} y_n - b_0 f(t_n, y_n) = F[y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-m}] = \sum_{k=1}^{m} (b_k f_{n-k} - \frac{a_k}{\tau} y_{n-k})$$

Обычно это уравнение решают методом Ньютона, выбирая начальное приближение $y_n^{(0)}$ равным y_{n-1}.

Заметим, что коэффициенты уравнения (81) определены с точностью до множителя. Чтобы устранить этот произвол, будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1 \quad . \tag{82}$$

В практике вычислений наибольшее распространение получили методы Адамса, которые представляют собой частный случай многошаговых методов (82)

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m}$$
$$n = m, m+1, \ldots, \tag{83}$$

Можно доказать, что порядок аппроксимации линейных m- шаговых разностных методов не может превосходить $2m$. Причем наивысший достижимый порядок аппроксимации для неявных m- шаговых методов равен $2m$, а для явных $2m-1$.

Для неявных m- шаговых методов Адамса (83) наивысший достижимый порядок аппроксимации равен $m+1$, а для явных - m.

Оказывается, что методы наивысшего порядка аппроксимации практически непригодны для расчетов, так как они неустойчивы, т.е. малые погрешности начальных условий приводят к большим погрешностям решений.

Приведем некоторые примеры многошаговых разностных методов для случая методов Адамса.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{3}{2} f_{n-1} - \frac{1}{2} f_{n-2}, \quad m = 2$$ явный двухшаговый метод Адамса 2-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{12}(23 f_{n-1} - 16 f_{n-2} + 5 f_{n-3}), \quad m = 3$$ явный трехшаговый метод Адамса 3-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{24}(55 f_{n-1} - 59 f_{n-2} + 37 f_{n-3} - 9 f_{n-4}), \quad m = 4$$ явный четырехшаговый метод Адамса 4-го порядка аппроксимации.

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} = \frac{1}{720}(1901 f_{n-1} - 2774 f_{n-2} + 2616 f_{n-3} - 1274 f_{n-4} + 251 f_{n-5}), \quad m = 5$$ явный 5-шаговый метод Адамса 5-го порядка аппроксимации.

11.3 Методы Рунге-Кутта

Методы Рунге-Кутта отличаются от разностных методов тем, что в них допускается вычисление правых частей $f(t,u)$ не только в точках сетки, но и в некоторых промежуточных точках.

Пример 1.Метод Рунге-Кутта второго порядка точности

Предположим, что приближенное значение y_n решения исходной задачи в момент $t = t_n$ уже известно. Для нахождении $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ поступим следующим образом. Сначала, используя схему Эйлера

$$\frac{y_{n+1/2} - y_n}{0.5\tau} = f(t_n, y_n) \tag{84}$$

вычислим промежуточное значение $y_{n+1/2}$, а затем воспользуемся разностным уравнением

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n + 0.5\tau, y_{n+1/2}) \tag{85}$$

из которого явным образом найдем искомое значение y_{n+1}.

Если подставить $y_{n+1/2}$, вычисленное по формуле (84) в уравнение (85), то получим разностное уравнение

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot f_n) \tag{86}$$

Метод (86) имеет второй порядок погрешности аппроксимации, т.е. невязка $\psi_n^1 = O(\tau^2)$ и является явным. Реализация метода (86) в виде двух этапов (84), (85) называется методом предиктор-корректор (предсказывающе – исправляющим), поскольку на первом этапе (84) приближенное значение предсказывается с невысокой точностью $O(\tau)$, а на втором этапе (85) это предсказанное значение исправляется, так что результирующая погрешность имеет второй порядок по τ. Тот же самый метод (86) можно реализовать несколько иначе. А именно, сначала вычислим последовательно функции

$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot k_1),$ а затем найдем y_{n+1} из уравнения $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = k_2$.

Такая форма реализации метода (86) называется методом Рунге-Кутта. Поскольку требуется вычислить две промежуточные функции k_1 и k_2, данный метод относится к двухэтапным.

11.4 Общая формулировка методов Рунге-Кутта

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта состоит в следующем. Пусть решение $y_n = y(t_n)$ уже известно. Задаются числовые коэффициенты $a_i, b_{ij}, \quad i = 2,3,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,m-1, \quad \sigma_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$ и последовательно вычисляются функции

$k_1 = f(t_n, y_n),$

$k_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau \cdot k_1),$

$k_3 = f(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2),$

.....,

$k_m = f(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau \cdot k_1 + b_{m2}\tau \cdot k_2 + \ldots + b_{m,m-1}\tau \cdot k_{m-1}).$

Затем из формулы

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i k_i \qquad (87)$$

находится новое значение $y_{n+1} = y(t_{n+1})$.

Коэффициенты a_i, b_{ij}, σ_i выбираются из соображений точности. Например, чтобы уравнение (87) аппроксимировало исходное уравнение, необходимо потребовать $\sum_{i=1}^{m} \sigma_i = 1$. Отметим, что методы Рунге-Кутта при $m > 5$ не используются.

Примеры методов Рунге-Кутта.

При $m = 1$ получаем метод Эйлера. При $m = 2$ получаем семейство методов

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau \cdot k_1),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) \qquad (88)$$

Методы (88) имеют первый порядок аппроксимации, если $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. Если же дополнительно потребовать $\sigma_2 a_2 = \sigma_2 b_{21} = 0.5$, то получим методы второго порядка аппроксимации. Двухэтапных методов третьего порядка аппроксимации не существует.

Приведем примеры методов Рунге-Кутта более высокого порядка аппроксимации.

Метод третьего порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + 0.5\tau, y_n + 0.5\tau \cdot k_1),$$
$$k_3 = f(t_n + \tau, y_n - \tau \cdot k_1 + 2\tau \cdot k_2),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).$$

Метод третьего порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{3}, y_n + \frac{\tau k_1}{3}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{2\tau}{3}, y_n + \frac{2\tau k_2}{3}),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).$$

Метод четвертого порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_1}{2}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_2}{2}),$$
$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau \cdot k_3),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Метод четвертого порядка:

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{4}, y_n + \frac{\tau k_1}{4}),$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_2}{2}),$$
$$k_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau \cdot k_1 - 2\tau \cdot k_2 + 2\tau \cdot k_3),$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4).$$

12 МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Дано уравнение:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{89}$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [a,b]$ удовлетворяет уравнению (89), а на концах отрезка $[a,b]$ - краевым условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_1[y(a), y'(a)] = 0 \\ \varphi_2[y(b), y'(b)] = 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Отличие краевой задачи от задачи Коши заключается в том, что в условия (90) входят значения функции и ее производной не в одной точке, а в двух «краевых» точках отрезка $[a,b]$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (89) и граничные условия (90) линейны:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned} \tag{92}$$

где $p(x), q(x), f(x)$ - известные непрерывные на $[a,b]$ функции, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ - заданные постоянные, причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

12.1 Метод конечных разностей

На отрезке $[a,b]$ введем равномерную сетку: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = x_0 + ih, i = 1,2,..,n-1$, и обозначим: $p_i = p(x_i); \quad q_i = q(x_i); \quad f_i = f(x_i).$

Заменим производные в дифференциальном уравнении (91) и краевых условиях (92) их разностными аналогами. Способов такой замены много, мы выберем центрально-разностные соотношения:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \tag{93}$$

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \tag{94}$$

Используя эти формулы, приближенно заменим уравнения (91) и краевые условия (92) системой:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \quad i = 1,2,...,n-1 \\ &\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

Система (95) представляет систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными $y_i, \ i = 0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$.Оценка погрешности аппроксимации при замене задачи (91)-(92) ее разностным аналогом (95) имеет вид:

$$\left|y_i - y(x_i)\right| \le \frac{h^2 M_4}{96}(b-a)^2, \quad M_4 = \max_{[a,b]} \left|y^{(IV)}(x)\right| \tag{96}$$

Пример:

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0, \quad y(1.4) = \frac{1}{2}\ln^2(1.4) = 0.0566 \end{cases}$$

Решение:

Заменим уравнение и граничные условия их разностными аппроксимациями:

$$x_i^2 \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h} = 1, \quad i = 1,2,3,....,n$$

Соберем подобные слагаемые:

$$y_{i-1}\left(\frac{x_i^2}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right) - y_i\left(\frac{2x_i^2}{h^2}\right) + y_{i+1}\left(\frac{x_i^2}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right) = 1$$

Умножим обе части уравнения на $2h^2$:

$$\left.\begin{aligned} &y_{i-1}(2x_i^2 - hx_i) - 4x_i^2 y_i + y_{i+1}(2x_i^2 + hx_i) = 2h^2 \\ &y_0 = 0 \\ &y_n = 0.056 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Выберем шаг $h = 0.1$, тогда получим три внутренних узла $x_i = 1 + 0.1 \cdot i; \quad i = 1,2,3$. Написав уравнение (97) для каждого из этих узлов, получим систему:

$$\left.\begin{array}{l} 2.31y_0 - 4.84y_1 + 2.53y_2 = 0.02 \\ 2.76y_1 - 5.76y_2 + 3.00y_3 = 0.02 \\ 3.25y_2 - 6.76y_3 + 3.51y_4 = 0.02 \\ y_0 = 0 \\ y_4 = 0.0566 \end{array}\right\} \qquad (98)$$

Решая систему (98), получим: $y_1 = 0.0046, \quad y_2 = 0.0167, \quad y_3 = 0.0345$

Для сравнения приведем точные значения решения этой краевой задачи в тех же узлах: $y_1^{точ} = 0.0047, \quad y_2^{точ} = 0.0166, \quad y_3^{точ} = 0.0344$

12.2 Метод прогонки

В случае большого числа узлов решать систему (98) обычными методами бывает сложно. Например, если взять шаг $h = 0.01$, то в нашем примере n будет равняться 40 и система (97) будет иметь размерность 41×41, и решать ее даже с помощью ЭВМ сложно. Однако, в данном случае особенность системы (97) заключается в том, что ее матрица имеет трехдиагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 2x_1^2 - hx_1 & -4x_1^2 & 2x_1^2 + hx_1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2^2 - hx_2 & 4x_2^2 & 2x_1^2 + hx_1 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 - hx_3 & 4x_3^2 & ..... & 0 & 0 \\ ... & ... & .... & .... & ..... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ..... & 4x_{n-1}^2 & 2x_{n-1}^2 + hx_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{array}{l} a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j \quad , \qquad j = 1,2,3,....,n-1 \\ y_0 = \nu_1 y_1 + \mu_1, \quad y_n = \nu_2 y_{n-1} + \mu_2 \end{array} \qquad (99)$$

Сначала осуществляется прямая прогонка, при которой вычисляются коэффициенты:

$$\alpha_1 = \nu_1, \quad \alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,....,n-1$$

$$\beta_1 = \mu_1, \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \quad j = 1,2,....,n-1 \quad . \qquad (100)$$

После этого осуществляется обратная прогонка, при которой вычисляются искомые значения функции:

$$y_n = \frac{\nu_2 \beta_n + \mu_2}{1 - \nu_2 \alpha_n}, \quad y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = n-1, n-2,.....,1, 0 \quad . \qquad (101)$$

Достаточные условия сходимости метода прогонки следующие:

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 1, 2, ..., n-1; \quad |\nu_1| \leq 1, \quad |\nu_2| < 1 \quad . \qquad (102)$$

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1 \quad , \qquad (103)$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, которая при всех $x \in [2;2{,}3]$ удовлетворяет уравнению (103), а на концах отрезка $x \in [2;2{,}3]$ - краевым условиям:

$$y(2) + 2y'(2) = 1$$
$$y(2{,}3) = 2{,}15 \qquad (104)$$

Введем сетку $\omega_h = \{x_i = x_0 + ih, i = 1,2,..,n-1; \quad x_0 = 2, \quad x_n = 2{,}3\}$. Если взять $h = 0{,}05$, то $n = \frac{b-a}{h} = \frac{2{,}3-2}{0{,}05} = 6$.

Обозначим $y_i = y(x_i)$ и заменим производные в дифференциальном уравнении (103) их разностными аналогами. Способов такой замены много, мы выберем центрально-разностные соотношения:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2};$$

Тогда уравнение (103) примет вид:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\frac{y_i}{x_i} = 1; \quad i = 1,2,\ldots,n-1, \qquad (105)$$

соберем подобные слагаемые:

$$y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right) - y_i\left(\frac{2}{h^2} + \frac{0{,}5}{x_i}\right) + y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right) = 1, \qquad (106)$$

и умножим обе части уравнения на h^2:

$$y_{i-1}(1 - 0{,}5hx_i) - y_i\left(2 + \frac{0{,}5h^2}{x_i}\right) + y_{i+1}(1 + 0{,}5hx_i) = h^2 \qquad (107)$$

Краевые условия (104) можно записать в виде:

$$\begin{cases} y_0 + 2y_0' = 1 \\ y_n = 2{,}15 \end{cases}$$

и заменить производную y_0' разностным соотношением:

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

, тогда они примут вид: $\begin{cases} y_0 + 2\frac{y_1 - y_0}{h} = 1 \\ y_n = 2{,}15 \end{cases}$, собирая подобные слагаемые в первом уравнении, получим:

$$y_0\frac{h-2}{h} + y_1\frac{2}{h} = 1$$

$$y_0(h-2) + 2y_1 = h$$

$$y_0 = \frac{2}{2-h}y_1 + \frac{h}{h-2}$$

Окончательно получим следующую систему для нахождения y_i:

$$y_{i-1}(1 - 0{,}5hx_i) - y_i\left(2 + \frac{0{,}5h^2}{x_i}\right) + y_{i+1}(1 + 0{,}5hx_i) = h^2, \quad i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$y_0 = \frac{2}{2-h}y_1 + \frac{h}{h-2}$$

$$y_n = 0 \cdot y_{n-1} + 2{,}15 \qquad (108)$$

которая представляет из себя систему n+1 линейных алгебраических уравнений с n+1 неизвестными y_i, $i = 0,1,2,...,n$, которые заменяют искомую функцию $y(x)$.Такие системы удобно решать с помощью метода прогонки (99)-(101).

a=	2		
b=	2,3		
h=	0,01		
n=	(b-a)/h		
n=	30		
nu_1=	1,005025	nu_2=	0
mu_1=	-0,00503	mu_2=	2,15
f_i=	-0,0001		

i	**x_i**	**a_i**	**b_i**	**c_i**	**alpha$_i$**	**beta$_i$**	**y_i**
0	2,0000	0,9900	1,0100	2,0000			2,2348
1	2,0100	0,9900	1,0101	2,0000	1,0050	-0,0050	2,2286
2	2,0200	0,9899	1,0101	2,0000	1,0049	-0,0050	2,2228
3	2,0300	0,9899	1,0102	2,0000	1,0048	-0,0051	2,2171
4	2,0400	0,9898	1,0102	2,0000	1,0047	-0,0051	2,2118
5	2,0500	0,9898	1,0103	2,0000	1,0046	-0,0051	2,2067
6	2,0600	0,9897	1,0103	2,0000	1,0045	-0,0051	2,2018
7	2,0700	0,9897	1,0104	2,0000	1,0044	-0,0051	2,1972
8	2,0800	0,9896	1,0104	2,0000	1,0043	-0,0052	2,1929
9	2,0900	0,9896	1,0105	2,0000	1,0042	-0,0052	2,1888
10	2,1000	0,9895	1,0105	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1849
11	2,1100	0,9895	1,0106	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1813
12	2,1200	0,9894	1,0106	2,0000	1,0040	-0,0052	2,1779
13	2,1300	0,9894	1,0107	2,0000	1,0039	-0,0052	2,1747
14	2,1400	0,9893	1,0107	2,0000	1,0038	-0,0052	2,1717
15	2,1500	0,9893	1,0108	2,0000	1,0037	-0,0052	2,1689
16	2,1600	0,9892	1,0108	2,0000	1,0036	-0,0052	2,1664
17	2,1700	0,9892	1,0109	2,0000	1,0035	-0,0053	2,1640
18	2,1800	0,9891	1,0109	2,0000	1,0034	-0,0053	2,1619
19	2,1900	0,9891	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1599
20	2,2000	0,9890	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1581
21	2,2100	0,9890	1,0111	2,0000	1,0032	-0,0053	2,1565
22	2,2200	0,9889	1,0111	2,0000	1,0031	-0,0053	2,1551
23	2,2300	0,9889	1,0112	2,0000	1,0030	-0,0053	2,1539
24	2,2400	0,9888	1,0112	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1529
25	2,2500	0,9888	1,0113	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1520
26	2,2600	0,9887	1,0113	2,0000	1,0028	-0,0053	2,1513
27	2,2700	0,9887	1,0114	2,0000	1,0027	-0,0052	2,1507
28	2,2800	0,9886	1,0114	2,0000	1,0026	-0,0052	2,1503
29	2,2900	0,9886	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1501
30	2,3000	0,9885	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1500

Для нашего примера:

$$\left.\begin{array}{l} a_i = (1-0{,}5hx_i);\quad b_i = (1+0{,}5hx_i);\quad c_i = 2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i};\quad f_i = -h^2,\quad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ \nu_1 = \dfrac{2}{2-h},\quad \mu_1 = \dfrac{h}{h-2}0,\quad \nu_2 = 0,\quad \mu_2 = 2{,}15 \end{array}\right\}$$

Прямая прогонка.

Вычисляем сначала коэффициенты α_i, β_i:

$$\alpha_1 = \nu_1 = \frac{2}{2-h},\quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i},\quad i = 1,2,\ldots.,n-1$$

$$\beta_1 = \mu_1 = \frac{h}{h-2},\quad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - \alpha_i a_i},\quad i = 1,2,\ldots.,n-1$$

,

т.е. по этим формулам мы вычислили $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.., \alpha_n;\quad \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots.., \beta_n;$

Обратная прогонка:

$$y_n = \frac{\nu_2\beta_n + \mu_2}{1-\nu_2\alpha_n} = 2{,}15$$

Сначала вычисляем , а затем остальные значения функции $y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \ldots., y_1, y_0$:

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1},\quad i = n-1,\ n-2,\ldots..,1,\ 0$$

13 МЕТОД СТРЕЛЬБЫ (БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД)

Это численный метод, заключающийся в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши для той же системы дифференциальных уравнений.

Пример:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u,v), & a \le x \le b \\ v'(x) = g(x,u,v) \end{cases} \tag{109}$$

$$\begin{cases} \varphi(u(a),v(a)) = 0 \\ \psi(u(b),v(b)) = 0 \end{cases} \tag{110}$$

Выберем произвольно значение $u(a) = \eta$, рассмотрим левое краевое условие как алгебраическое уравнение $\varphi(\eta, v(a)) = 0$ и определим удовлетворяющее ему значение $v(a) = \varsigma(\eta)$. Возьмем значения $u(a) = \eta,\ v(a) = \varsigma$ в качестве начальных условий задачи Коши для системы (109) и проинтегрируем эту задачу Коши любым численным методом, например, методом Рунге-Кутта. При этом получим решение $u(x;\eta),\ v(x;\eta)$, зависящее от η, как от параметра.

Значение ς выбрано так, что найденное решение удовлетворяет левому краевому условию (110). Однако правому краевому условию это решение, вообще говоря, не удовлетворяет: при его подстановке левая часть правого краевого условия, рассматриваемая как некоторая функция параметра η:

$$\overline{\psi}(\eta) = \psi(u(b;\eta),v(b;\eta)), \tag{111}$$

не обратится в нуль. Надо каким-либо способом менять параметр η, пока не подберем такое значение, для которого $\overline{\psi}(\eta) \approx 0$ с требуемой точностью. Таким образом, решение краевой задачи (109)-(110) сводится к нахождению корня одного алгебраического уравнения

$$\overline{\psi}(\eta) = 0. \tag{112}$$

Для решения задачи (112) можно применять метод дихотомии, метод Ньютона или метод секущих.

Метод стрельбы прост, применим как к линейным, так и к нелинейным задачам и позволяет использовать при численном интегрировании схемы Рунге-

Кутта (или другие) высокого порядка точности. К большинству задач типа (109)-(110) он применяется успешно.

Пример.

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' = 1 \\ y(1) = 0, \quad y(1.4) = \dfrac{1}{2}\ln^2(1.4) = 0.0566 \end{cases}$$

Сведем уравнение 2-го порядка к системе двух уравнений 1-го порядка с помощь замены: $y(x) = u(x), \quad y'(x) = v(x)$.

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = \dfrac{1 - x \cdot v(x)}{x^2} \\ u(1) = 0, \quad u(1.4) - 0.0566 = 0 \end{cases} \tag{113}$$

Вместо краевой задачи (113) решаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = \dfrac{1 - x \cdot v(x)}{x^2} \\ u(1) = 0, \quad v(1) = \beta \end{cases} \tag{114}$$

Где β будем подбирать так, чтобы в конце концов выполнилось условие u(1,4)-0,0566=0.

Решаем систему (114) методом Рунге-Кутта 2-го порядка с шагом h=0.1.

$$\begin{cases} u^0 = u(1) = 0 \\ v^0 = v(1) = \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + 0.5hv^n \\ v^{n+\frac{1}{2}} = v^n + 0.5h\dfrac{1 - x_n v^n}{x_n^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + hv^{n+\frac{1}{2}} \\ v^{n+1} = v^n + h\dfrac{1 - (x_n + 0.5h)v^{n+\frac{1}{2}}}{(x_n + 0.5h)^2} \end{cases}$$

Организуем вычисления в таблицах Excel.

Для случая $\beta = 1$

xn	un	vn	un+1/2	vn+1/2
1	0	1	0,05	1
1,1	0,1	0,995465	0,149773	0,991539
1,2	0,199154	0,984858	0,248397	0,978545
1,3	0,297008	0,970575	0,345537	0,962831
1,4	0,393291	0,954124		
u(1.4)-0,0566=	0,336691			

видим, u(1,4)-0,0566=0,33691.

Для случая $\beta = -0{,}5$:

xn	un	vn	un+1/2	vn+1/2
1	0	-0,5	-0,025	-0,425
1,1	-0,0425	-0,36882	-0,06094	-0,31073
1,2	-0,07357	-0,26619	-0,08688	-0,22037
1,3	-0,09561	-0,18456	-0,10484	-0,14787
1,4	-0,1104	-0,11873		
u(1.4)-0,0566=	-0,167			

видим, u(1,4)-0,0566= -0,167.

Т.е. на отрезке [-0,5;1] существует такое значение β, которое, будучи подставленное в (114), приведет к тому, что u(1,4)-0,0566=0. Найти это значение можно методом деления отрезка пополам.

13.1 Метод Галеркина

Пусть дано уравнение с некоторыми краевыми условиями (для определенности — первого рода)

$$A(u(x)) = f(x), \quad a \le x \le b, \quad u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{115}$$

будем искать приближенное решение в виде суммы

$$u(x) \approx y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{116}$$

где $\varphi_0(x)$ — некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (115), а $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$ — какая-то система линейно-независимых функций, полная в классе непрерывных функций, определенных на отрезке [a,b] и обращающихся в нуль на его концах.

Для определения коэффициентов c_k потребуем выполнения следующей системы линейных алгебраических уравнений.

$$\int_a^b [A(y_n(x)) - f(x)]\varphi_k(x)dx = 0, \quad 1 \le k \le n \tag{117}$$

Найдя из нее коэффициенты c_k, получим приближенное решение (116).

Поясним, откуда появляются система (117). Оказывается, если для некоторой функции $F(x)$ и полной системы функций $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$

$$\int_a^b F(x)\varphi_k(x)dx = 0, \quad \forall\, 1 \le k < \infty$$

выполняется соотношение то $F(x) \equiv 0$ на [a,b].

Таким образом, если бы мы нашли такую функцию $u(x)$, чтобы $A(u(x)) - f(x)$ было ортогонально $\varphi_k(x),\ \ 1 \le k < \infty$, то это означало бы, что $A(u(x)) = f(x)$ и задача (115) была бы решена точно. Мы же в равенствах (117) требуем ортогональность только при $k \le n$, следовательно $A(u(x)) \approx f(x)$

Пример.

$$u''(x) + u(x) = -x$$
$$u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{118}$$

Решение.

Положим $\varphi_0(x) = 0$ и выберем полную систему функций $\varphi_k(x) = x^k(\frac{\pi}{2} - x), \quad 1 \le k < \infty$.

Если ограничиться одним членом в (116), т.е.

$u(x) \approx y_1(x) = c_1\varphi_1(x) = c_1 x(\frac{\pi}{2} - x)$, то для нахождения c_1 получим уравнение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_1''(x)+y_1(x))-(-x)]\varphi_1(x)dx=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(-2c_1+c_1x(\frac{\pi}{2}-x))+x]x(\frac{\pi}{2}-x)dx=0$$

$$c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-2+x(\frac{\pi}{2}-x)]x(\frac{\pi}{2}-x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\frac{\pi}{2}-x)dx=0$$

$c_1 \approx 0{,}521$

Если в (26) возьмем два члена суммы, т.е $u(x)\approx y_2(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=c_1x(\frac{\pi}{2}-x)+c_2x^2(\frac{\pi}{2}-x)$, то получим два уравнения относительно двух неизвестных c_1 и c_2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_2''(x)+y_2(x))-(-x)]\varphi_1(x)dx=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y_2''(x)+y_2(x))-(-x)]\varphi_2(x)dx=0$$

$c_1 \approx 0{,}815$

$c_2 \approx 0{,}377$

.

Метод Галеркина при небольшом числе членов дает плохие результаты. Обратим внимание на то, что при увеличении n не только добавляются новые коэффициенты, но и меняются старые, что не очень удобно. Однако, если задача линейная, а система $\varphi_k(x)$ ортогональная, то уже найденные c_k не будут меняться при увеличении n.

Метод Галеркина для нелинейных задач используют лишь для нахождения грубого приближения; для линейных же задач им можно найти решение с хорошей точностью. Кроме этого, результат очень чувствителен к тому, насколько удачно выбрана система функций $\varphi_k(x)$ для данной задачи.

14 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

14.1 Понятие дифференциального уравнения с частными производными

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется дифференциальным уравнением с частными производными.

Оно имеет вид

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}) = 0$$

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения с частными производными.

14.2 Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными II порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных II порядка с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (119)$$

где x,y – независимые переменные, $u(x, y)$ - искомая функция, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ - частные производные от искомой функции.

Решением уравнения (119) называется функция $u(x, y)$, обращающая это уравнение в тождество.

Уравнение (119) называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений. Линейное уравнение можно представить в виде:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y) \qquad (120)$$

причем A, B, C, a, b, c - зависят лишь от x, y.

Обозначим $D = AC - B^2$. В зависимости от знака функции D уравнение (120) относится в некоторой заданной области к одному из следующих типов.

$D > 0$ - эллиптический тип;

$D = 0$ - параболический тип;

$D < 0$ - гиперболический тип.

Тип линейного уравнения (2) является его важной особенностью и сохраняется при любом невырожденном преобразовании:

$\xi = \varphi(x, y); \quad \eta = \psi(x, y)$, т.е. если $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0$

14.3 Примеры основных типов уравнений с частными производными

Волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (121)$$

где c - скорость распространения волны в данной среде. Это уравнение возникает при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений. Это классический пример уравнения гиперболического типа.

В одномерном случае уравнение (121) называют уравнением колебаний струны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. А в двумерном, уравнением колебаний мембраны: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$.

Уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (122)$$

a называют коэффициентом теплопроводности. Данное уравнение описывает процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, а также явление диффузии.

В одномерном случае уравнение (122) принимает вид $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и описывает распространение тепла в тонком однородном стержне, а в двухмерном: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ - распространение тепла в тонкой однородной пластине. Уравнение (122) является уравнением параболического типа.

Уравнение Пуассона.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z) \qquad (123)$$

описывает стационарный (установившийся) процесс распространения тепла в однородном изотропном теле.

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (5) переходит в уравнение Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (124)$$

Уравнению Лапласа удовлетворяют также потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля, в которых отсутствуют массы и, соответственно, электрические заряды. Уравнения (123) и (124) – примеры уравнений эллиптического типа.

Каждое из уравнений (121)-(124) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям.

1. Решение должно существовать.
2. Решение должно быть единственным.
3. Решение должно быть устойчивым, т.е. малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Три вышеназванные требования можно объединить в одно: корректно поставленная задача.

15 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

15.1 Счет на установление

Стационарные решения эволюционных задач.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G \tag{125}$$

$$u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G \tag{126}$$

где G – есть многомерная замкнутая область с границей Γ. В отличие от эволюционных задач постановка 125) не содержит начальных условий.

Задачу (125, 126) будем называть стационарной. Наряду с ней рассмотрим эволюционную задачу для параболического уравнения с теми же граничными условиями и произвольно выбранными начальными данными:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{v}(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x) + f(x), \quad x \in G, \quad 0 \le t < +\infty, \\ &\mathrm{v}(x,t)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G, \\ &\mathrm{v}(x,0) = \mathrm{v}_0(x) \end{aligned} \tag{127}$$

В курсах математической физики показано, что при $t \to \infty$ решение эволюционной задачи (127) среднеквадратично сходится к решению $u(x)$ стационарной задачи (125, 126).

Таким образом, вместо задачи (125, 126) для эллиптического уравнения можно взять эволюционную задачу (127) для параболического уравнения с тем же пространственным оператором, произвольно выбрать начальные данные и вычислить решение $\mathrm{v}(x,t)$ при достаточно большом t. Стационарный (не зависящий от времени) предел $u(x)$, к которому стремится $\mathrm{v}(x,t)$ при $t \to \infty$ и будет решением стационарной задачи (127).

Этот способ называется счетом на установление. Он позволяет осуществить численное решение эллиптических задач хорошо разработанными методами решения параболических задач, например, продольно-поперечной схемой для двумерных задач и локально-одномерными схемами в случае большего числа измерений.

15.2 Оптимальный шаг

Для расчета эволюционной *n* – мерной задачи до момента *T* используют экономичные разностные схемы. При этом шаги τ и $h_i, i = 1,2,\ldots,n$ выбирают достаточно малыми, чтобы обеспечить требуемую близость разностного решения к точному решению v*(x,t)* эволюционной задачи.

Однако, если шаг по времени выбран слишком малым, то расчет до момента *T* потребует большого числа шагов, что неоправданно увеличит объем вычислений. Очевидно, должен существовать оптимальный шаг τ_0.

В частности, для двумерной задачи Дирихле в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} &u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = -f(x), \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \\ &u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad x = (x_1, x_2) \end{aligned} \tag{128}$$

которой соответствует эволюционная задача:

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_t = \mathrm{v}_{x_1x_1} + \mathrm{v}_{x_2x_2} + f(x), \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \\ &\mathrm{v}(x,t)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \\ &\mathrm{v}(x,0) = \mathrm{v}_0(x) \end{aligned} \tag{129}$$

оптимальный шаг будет равен

$$\tau_0 \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{130}$$

где N – число узлов по x_1, M – число узлов по x_2. Соответствующее минимальное число шагов, необходимое для установления будет равно

$$K(\tau_0) \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1/2} \ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{131}$$

где ε - требуемая точность.

Пусть, например, a=b=1; N=M=10; $\varepsilon = 0{,}01$, тогда $\tau_0 \approx 0{,}03$, $K(\tau_0) \approx 8$.

15.3 Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона: найти непрерывную в $\overline{G} = G \cup \Gamma$ функцию $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{132}$$

и граничному условию $u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma$, где G – прямоугольник, $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$,

Γ – его граница, $f(x), \mu(x)$ - заданные функции, предполагается, что они таковы, что решение задачи (132) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией.

Введем в $\overline{G}$ прямоугольную сетку

$$\Omega_h = \left\{x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)} = ih_1,\ i = 0,1,\ldots,N_1,\ h_1 N_1 = l_1;\quad x_2^{(j)} = jh_2,\ j = 0,1,\ldots,N_2,\ h_2 N_2 = l_2\right\}$$

с шагами h_1 по переменной x_1 и h_2 - по переменной x_2.

Обозначив $y_{ij} = y(x_{ij}),\ f_{ij} = f(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h$, сопоставим задаче Дирихле (132) следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{ij},\\
&i = 1,2,\ldots,N_1 - 1, \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,\\
&y_{i,0} = \mu(x_1^i, 0), \quad y_{i,N_2} = \mu(x_1^i, l_2), \quad i = 1,2,\ldots,N_1 - 1,\\
&y_{0,j} = \mu(0, x_2^j), \quad y_{N_1,j} = \mu(l_1, x_2^j), \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{133}$$

Построенная разностная схема имеет второй порядок погрешности аппроксимации по h_1 и по h_2 и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно y_{ij}, состоящую из $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ уравнений и стольких же неизвестных. Она является устойчивой по правой части и граничным условиям.

Матрица системы (133) характеризуется высоким порядком, сильной разреженностью (т.е. преобладанием нулевых элементов) и большим разбросом собственных чисел).

15.4 Методы Якоби и Зейделя

Метод Якоби записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_{i,j}^{n+1}=\frac{y_{i+1,j}^{n}+y_{i-1,j}^{n}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^{n}+y_{i,j-1}^{n}}{h_2^2}+f_{ij},\\
&i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\
&y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\
&y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,
\end{aligned}
\tag{134}
$$

Здесь y_{ij}^{n} - значения решения в точке x_{ij} на n-й итерации, а y_{ij}^{n+1} - на n+1-ой.

Метод Якоби требует $O(h^{-2})$ итераций для достижения заданной точности. Это очень медленная сходимость.

Рассмотрим метод Зейделя для системы (134). В общем случае метод Зейделя строится таким образом, чтобы в уравнении с номером *i*неизвестные, имеющие индекс, больший, чем *i*, вычислялись бы по значениям на *n*-ой итерации.

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_{i+1,j}^{n}-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^{n}-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}=-f_{ij},\\
&i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\
&y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\
&y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Хотя метод Зейделя является неявным, нахождение значений y_{ij}^{n+1} на новой итерации не представляет труда, поскольку оно сводится к обращению треугольной матрицы. Здесь нужно лишь правильно установить последовательность проведения вычислений.

Метод Зейделя сходится несколько быстрее, чем метод Якоби, однако число итераций, необходимое для достижения заданной точности, здесь также является величиной порядка h^{-2}.

15.5 Метод верхней релаксации

Для общей системы уравнений

$$Ay = f \tag{136}$$

метод верхней релаксации определяется следующим образом. Система (136) представляется в виде

$$(A_- + A_+ + D)y = f \tag{137}$$

где A_+, A_- - нижняя треугольная и верхняя треугольная матрицы с нулевыми диагоналями, D – диагональная матрица. Вводится итерационный параметр $\omega \in (0, 2)$, и итерации определяются формулами

$$A_- y_{n+1} + A_+ y_n + D(\frac{1}{\omega} y_{n+1} + (1 - \frac{1}{\omega}) y_n) = f \tag{138}$$

При $\omega = 1$ метод (138) совпадает с методом Зейделя

$$(A_- + D)y_{n+1} + A_+ y_n = f$$

В случае системы представлению (137) соответствует запись в виде

$$\left(\frac{y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1}}{h_2^2}\right) + \left(\frac{y_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}}{h_2^2}\right) - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_{i,j} = -f_{ij}, \tag{139}$$

Тогда метод верхней релаксации запишется в виде

$$\left(\frac{y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}\right) + \left(\frac{y_{i+1,j}^{n}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n}}{h_2^2}\right) - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)\left(\frac{1}{\omega} y_{i,j}^{n+1} + (1 - \frac{1}{\omega}) y_{i,j}^{n}\right) = -f_{ij}, \tag{140}$$

$$i = 1,2,\ldots, N_1 - 1, \quad j = 1,2,\ldots, N_2 - 1, \quad n = 0,1,\ldots$$

Способ нахождения значений y_{ij}^{n+1} на новой итерации тот же, что и в методе Зейделя, начиная от левого нижнего угла области G.

Основное преимущество метода верхней релаксации перед методом Зейделя состоит в существенном увеличении скорости сходимости при оптимальном выборе параметра ω.

Можно доказать, что при $h_1 = h_2 = h$, оптимальный параметр ω равен

$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{\mu}}$, $\mu = 4\sin^2\frac{\pi h}{2}$. При этом необходимое число итераций для достижения точности ε будет равно

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2\ln \varepsilon^{-1}}{\pi h} = O(\frac{1}{h}) \qquad (141)$$

15.6 Случай криволинейной области

Если граница Γ области G криволинейна, то значения y_{ij} для граничных узлов получают путем переноса значений из точек границы Γ. Погрешность, получаемую в результате такого переноса, можно значительно уменьшить, если значения функции $y(A_h)$ в этих узлах последовательно исправлять по формулам линейной интерполяции

$$\begin{aligned} &y^0(A_h) = u(A) \\ &y^n(A_h) = u(A) + \frac{y^{k-1}(B) - u(A)}{h+\delta}\delta, \\ &k = 1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (142)$$

Где A – ближайшая к A_h точка границы Γ ($u(A) = \mu(A)$, B – ближайший к A_h внутренний узел сетки Ω_h и δ - удаление узла A_h от точкиA, причем $\delta > 0$, если A_h - внутренняя точка области G, и $\delta < 0$, если A_h - внешняя точка области G. В частном случае, если узел A_h лежит на границе Γ ($(A_h \equiv A, \delta = 0)$, то имеем точно $y^n(A_h) = u(A) = \varphi(A)$.

На практике после некоторого шага n можно считать $y^n(A_h)$ неизменными (например, если эти значения установятся с заданной степенью точности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учебник для вузов – М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.

2 Самарский А. А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 288 с.

3 Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах – М.: Высш. шк., 2008. – 480 с.

4 Турганбаев Е.М., Рахметуллина С.Ж. Численные методы. Учебное пособие – Усть-Каменогорск: ВКГТУ, 2013. – 100 с.

5 Бахвалов Н., Корнев А., Чижонков Е. Численные методы. Решения задач и упражнения – ДРОФА, 2009. – 400 с.

6 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 608 с.

7 Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах: Учеб. пособие для втузов. – М. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 368 с.

8 Какенова О.С., Калижанова А.У., Айткулова Ж.С., Кашаганова Г.Б. Вычислительные методы с прменением ЭВМ: Методические указания. – А. – Издательский центр КазНТУ, 2002. – 90 с.

9 Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. – М. –Высшая школа. 1990. – 205 с.